Notación:

Sistema: ejes ortogonales ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$).

Sistema inercial primario con convención izquierda.

Vectores: $\vec{A}$, $\vec{a}$, $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{a}}$, $\dot{\mathbf{a}}$, $\ddot{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{a}}$

$\vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{x}} + a_2\hat{\mathbf{y}} + a_3\hat{\mathbf{z}}$

Módulos: $|\vec{A}|$, $|\vec{a}|$, $|\vec{\mathbf{A}}|$, $|\vec{\mathbf{a}}|$, $|\dot{\mathbf{a}}|$, $|\ddot{\mathbf{a}}|$, $|\hat{\mathbf{a}}|$, a, $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}$

Prod. escalar: $\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = ab\cos\theta \qquad \theta = \vec{\mathbf{a}} \angle \vec{\mathbf{b}}$

$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = \sum_i a_i b_i$

Prod. vectorial: $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{c}} \qquad \hat{\mathbf{c}} \perp \vec{\mathbf{a}}\ ,\ \hat{\mathbf{c}} \perp \vec{\mathbf{b}}$

$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\hat{\mathbf{x}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\hat{\mathbf{y}} +$

$+(a_1b_2 - a_2b_1)\,\hat{\mathbf{z}}$

Matrices: $\mathbf{A}_{n\times m} \longrightarrow \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & \cdots & A_{nm} \end{vmatrix}$

Prod. exterior: $\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{C}} \longrightarrow C_{ij} = a_ib_j$ (tensor de rango 2).

$\mathbf{A}\vec{\mathbf{b}} = \bar{\bar{\mathbf{D}}} \longrightarrow D_{ijk} = A_{ij}b_k$ (tensor de rango 3).

Unidad I. Principios fundamentales

1. Leyes de Kepler (1609-1619):

- La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.
- El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
- La relación entre los cuadrados de los períodos de dos planetas es igual a la relación entre los cubos de sus distancias medias al Sol (...aproximadamente!).

2. Ley de Gravitación Universal (Newton 1687):

- Dos partículas se atraen mutuamente con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y que actúa en la linea que las une. (**Constante de Gravitación Universal**).

3. Leyes de Newton (1687):

1. Una partícula con masa constante permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme a menos que se le aplique alguna fuerza.
2. Una partícula a la que se aplica una fuerza se mueve de modo que la variación de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza actuante.
3. La fuerza ejercida sobre una partícula sobre otra es igual y de sentido contrario a la que la segunda de ellas ejerce sobre la primera.

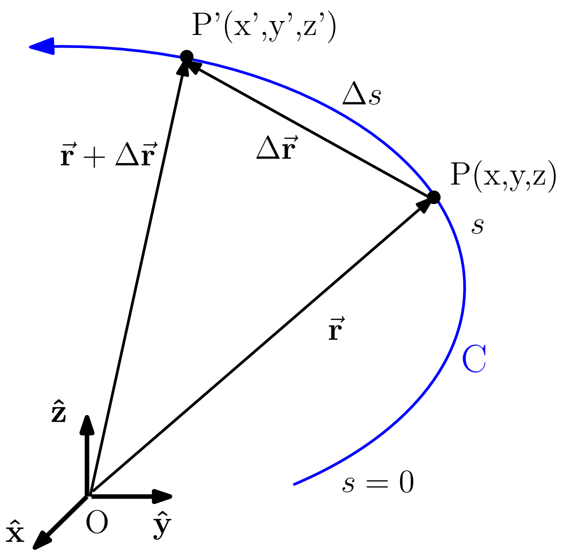

Figura 1:

4. Cinemática del movimiento:

Sea una partícula en un punto $P(x, y, z)$ que se mueve a lo largo de la curva C, de modo que la distancia s se incrementa con el tiempo (Figura 1). Su posición viene dada por:

$$\vec{\mathbf{r}} = x(t)\,\hat{\mathbf{x}} + y(t)\,\hat{\mathbf{y}} + z(t)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{I-1}$$

donde t s el tiempo. Supongamos que P se mueve a P' en el intervalo Δt, por lo que $\vec{\mathbf{r}}$ cambia en magnitud y dirección con un incremento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, y el arco s se incrementa en Δs. Entonces:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}\right). \tag{I-2}$$

Esta expresón la podemos escribir como:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta s}\right)\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right). \tag{I-3}$$

Pero $\lim_{\Delta s \to 0}(\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta s)$ es un vector unitario tangente a C en P al que llamaremos $\hat{\mathbf{u_T}}$, y $\lim_{\Delta t \to 0}(\Delta s/\Delta t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$ es el módulo de la velocidad de la partícula en P. Entonces, $\vec{\mathbf{v}}$ es un vector tangente a C de magnitud v (Figura 2):

$$\vec{\mathbf{v}} = v\,\hat{\mathbf{u_T}}. \tag{I-4}$$

Además, podemos decir que:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u_T}} + v\,\dot{\hat{\mathbf{u_T}}}, \tag{I-5}$$

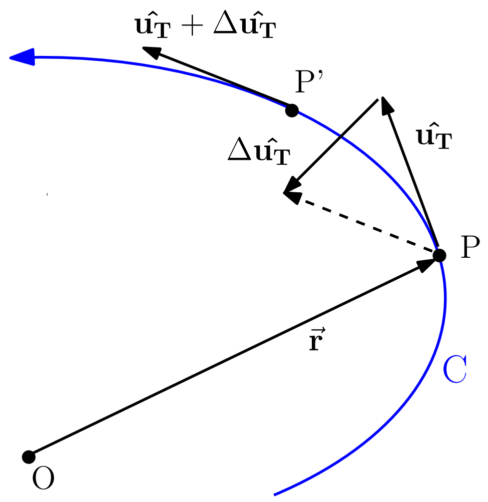

Figura 2:

donde:

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{T}} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0\ \Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = v\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}, \tag{I-6}$$

pero $|\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}/\mathrm{d}s|$ es la magnitud de la curvatura de C en P. Como la recíproca de la curvatura es el radio de curvatura ρ, tenemos:

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{T}} = \frac{v}{\rho}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{N}}, \tag{I-7}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{N}}$ es un vector unitario normal a la curva C dirigido a su lado cóncavo. Reemplazando en la ecuación original, tenemos finalmente que:

$$\vec{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{N}}, \tag{I-8}$$

lo que indica que una partícula que se mueve a lo largo de un círculo con velocidad constante ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$) sufre de todos modos una aceleración.

Resulta de interés resolver $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$ en componentes a lo largo y perpendicular al radio vector en un sistema plano de coordenadas polares. Supongamos que la partícula se encuentra en el punto $P(r,\theta)$ moviéndose en la curva C en la dirección en la que θ se incrementa (Figura 3). Sean $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$ y $\hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ vectores unitarios a lo largo y perpendicular al radio vector $\vec{\mathbf{r}}$, respectivamente. Como $\vec{\mathbf{r}} = r\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$, tenemos:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + r\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{r}}, \tag{I-9}$$

pero $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_{\theta}$, y entonces:

$$\vec{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_{\theta}. \tag{I-10}$$

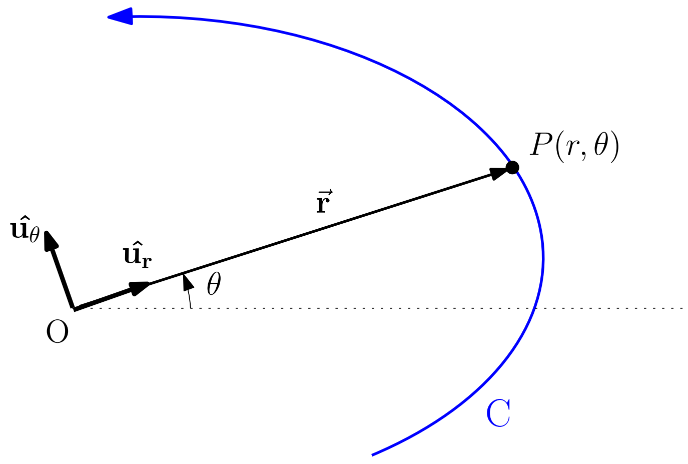

Figura 3:

Derivando respecto del tiempo una vez más y recordando que $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\theta = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$, tenemos:

$$\vec{\mathbf{a}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\hat{\mathbf{u}}_\theta. \tag{I-11}$$

5. Velocidad Areolar:

La velocidad con la cual el radio vector entre el origen de coordenadas y un punto P barre cierta superficie se denomina VELOCIDAD AREOLAR respecto del origen de coordenadas. Supongamos que $P(r,\theta)$ se mueve sobre una curva C (Figura 4). Sea $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ el área del triángulo OPP' barrida por el radio vector en un cierto tiempo Δt. Como en ese intervalo el radio $\vec{\mathbf{r}}$ cambia a $(\vec{\mathbf{r}} + \Delta\vec{\mathbf{r}})$, tenemos:

$$\Delta\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[\vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\mathbf{r}} + \Delta\vec{\mathbf{r}})] = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{r}} \times \Delta\vec{\mathbf{r}}). \tag{I-12}$$

Entonces:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{A}}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}). \tag{I-13}$$

Esta velocidad areolar es un vector perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$. En coordenadas polares:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left[(r\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}) \times \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right)\right] = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}_\mathbf{A}}, \tag{I-14}$$

donde $\hat{\mathbf{u}_\mathbf{A}}$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

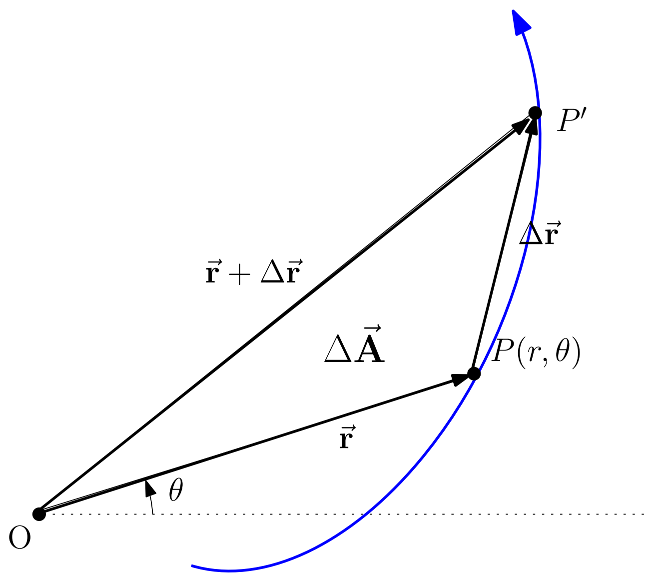

Figura 4:

6. Dinámica del movimiento:

Sea una partícula de masa m que se mueve por los efectos de una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. Según la segunda Ley de Newton:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}, \tag{I-15}$$

donde $\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$ es la cantidad de movimiento.

Por definición, el *momento angular* de una masa m en la posición $\vec{\mathbf{r}}$ moviéndose con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ sobre una curva C en un instante t es $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\,\vec{\mathbf{v}}$. Diferenciando respecto de t y manteniendo m constante obtenemos:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times m\,\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}} \times m\,\dot{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{N}}, \tag{I-16}$$

donde $\vec{\mathbf{N}}$ es el *momento* de $\vec{\mathbf{F}}$ alrededor del origen o TORQUE.

Si obtenemos el producto escalar de $\vec{\mathbf{v}}$ por $\vec{\mathbf{F}}$:

$$m\,\vec{\mathbf{v}} \bullet \dot{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{F}}, \tag{I-17}$$

pero $\mathrm{d}(\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{v}})/\mathrm{d}t = 2\,\vec{\mathbf{v}} \bullet \dot{\mathbf{v}}$. Como $\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{v}} = v^2$, podemos escribir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{F}}, \tag{I-18}$$

que expresa la variación de la energía cinética en el tiempo. Si multiplicamos ambos lados por $\mathrm{d}t$ e integramos:

$$\frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{F}}\,\mathrm{d}t = \int_{s_1}^{s_2} \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}, \tag{I-19}$$

que es una integral de línea que representa el trabajo hecho por $\vec{\mathbf{F}}$ al mover la masa m de P_1 a P_2. O sea, el cambio en energía cinética es igual al trabajo hecho por la fuerza en ese intervalo.

Si el valor de la integral es independiente del recorrido entre P_1 y P_2 (el campo vectorial es conservativo), existe una función escalar V que depende de la posición y que está definida por:

$$\int_{s_1}^{s_2} \vec{\mathbf{F}} \bullet \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = V(s_1) - V(s_2), \tag{I-20}$$

ecuación que se denomina FUNCIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL. Entonces, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}m\left(v_2^2\right) + V(s_2) = \frac{1}{2}m\left(v_1^2\right) + V(s_1), \tag{I-21}$$

que expresa la conservación de la energía para la masa en movimiento. Además, dado que el campo vectorial es conservativo tenemos que $-\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}V$.

7. El potencial de un cuerpo esférico:

Un resultado básico demostrado por Newton es que una esfera que es homogénea en cáscaras concéntricas atrae una masa puntual exterior del mismo modo que si toda su masa estuviera concentrada en su centro. Este resultado permite considerar la atracción de dos planetas como si fueran cuerpos puntuales.

La magnitud de la fuerza por unidad de masa en un punto a una distancia $x = r$ de una masa $\mathcal{M}$ está dada por la Ley de Gravitación $F = -G\mathcal{M}/x^2$. Cuando la partícula se mueve de $x = r$ a $x = \infty$ se realiza una cantidad de trabajo contra el campo de fuerza:

$$-G\mathcal{M}\int_r^\infty \tfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{G\mathcal{M}}{r} = U, \tag{I-22}$$

que, por definición, es el *potencial* en r. Entonces, la diferencia de potencial entre dos puntos $x = r_1$ y $x = r_2$ es:

$$\Delta U = -G\mathcal{M}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right], \tag{I-23}$$

que corresponde al trabajo hecho por $\vec{\mathbf{F}}$ al mover la masa unitaria de $x = r_1$ a $x = r_2$. El potencial a la distancia r desde $\mathcal{M}$ y la fuerza en ese punto estan relacionados por:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}. \tag{I-24}$$

Supongamos ahora una sección de cáscara esférica de radio a, grosor unidad, y densidad constante ρ (Figura 5). Un elemento de superficie en esta cáscara será:

$$\mathrm{d}\sigma = a^2 \sin\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta \tag{I-25}$$

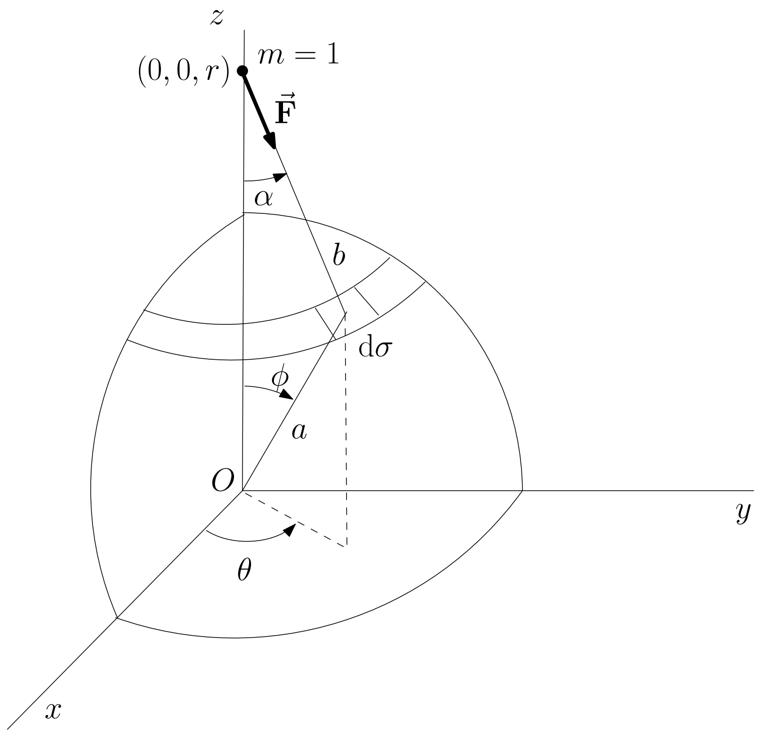

Figura 5:

donde ϕ y θ son los ángulos de posición del elemento de superficie respecto de su centro. Si colocamos una masa unitaria en $(0,0,r)$, la magnitud de la fuerza de atracción entre $\mathrm{d}\sigma$ y esta masa unitaria será:

$$|\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}| = -\frac{G\rho \mathrm{d}\sigma}{b^2}, \tag{I-26}$$

donde b es la distancia entre el elemento de superficie y $(0,0,r)$. Por simetría, las componentes de estos vectores que son paralelas al plano xy se cancelan cuando los elementos $\mathrm{d}\sigma$ se suman sobre toda la cáscara esférica, mientras que las componentes según z se suman. Entonces, para la fuerza total en $(0,0,r)$ debido a la cáscara tenemos:

$$|\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{z}}| = -\int_S \tfrac{G\rho \mathrm{d}\sigma\,\cos\alpha}{b^2}, \tag{I-27}$$

donde α es el ángulo entre la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y el eje z. La integración de esta última ecuación es más sencilla si utilizamos a b como variable. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&b^2 = a^2 + r^2 - 2ar\,\cos\phi,\\
&\cos\alpha = \frac{r-z}{b} = \frac{r - a\,\cos\phi}{b} = \frac{r^2 - a^2 + b^2}{2br},\\
&b\,\mathrm{d}b = ar\,\sin\phi\,\mathrm{d}\phi,\\
&\mathrm{d}\sigma = \frac{ab\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\theta}{r}.
\end{aligned} \tag{I-28}$$

Entonces:

$$F_z = -\frac{G\rho a}{2r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{b=r-a}^{b=r+a} \tfrac{r^2+b^2-a^2}{b^2}\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\theta, \tag{I-29}$$

y por integración se obtiene:

$$F_z = -\frac{4\pi G\rho a^2}{r^2}. \tag{I-30}$$

Pero $4\pi\rho a^2 = \mathcal{M}(a)$ es la masa de la cáscara, por lo que la última ecuación indica que F_z es igual a la magnitud de la fuerza producida si toda la masa de la cáscara estuviera concentrada en el centro.

Para una esfera sólida de radio R en donde la densidad es función sólo de la distancia al centro, la magnitud de la fuerza por unidad de masa en un punto exterior es:

$$F = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_{a=0}^{a=R} \rho a^2 \mathrm{d}a. \tag{I-31}$$

Como la masa de la esfera es:

$$\mathcal{M} = 4\pi\int_{a=0}^{a=R} \rho a^2 \mathrm{d}a, \tag{I-32}$$

la magnitud de la fuerza total es:

$$F = -\frac{G\mathcal{M}}{r^2}, \tag{I-33}$$

lo que indica que la esfera sólida atrae a una masa unitaria exterior como si toda su mas estuviera concentrada en su centro. Entonces, el potencial en un punto externo debido a un cuerpo esférico y homogéneo en cáscaras concéntricas es:

$$U = -\frac{G\mathcal{M}}{r}, \tag{I-34}$$

donde r es la distancia del punto al centro de la esfera.

8. Fuerzas centrales. La ley de las áreas:

Cuando la fuerza que causa la aceleración en el movimiento de una partícula siempre pasa a través de un punto fijo, estamos en presencia de un movimiento debido a una FUERZA CENTRAL. En las siguientes secciones obtendremos varias propiedades de este tipo de movimiento que son independientes de la forma precisa de la órbita y de la forma analítica de la fuerza actuante.

Consideremos una partícula de masa m con posición $\vec{\mathbf{r}}$ relativa al origen fijo O (Figura 6). La partícula describe la curva C bajo la acción de una fuerza central $\vec{\mathbf{F}} = F\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$. Por la segunda Ley de Newton para una masa constante tenemos:

$$m\,\dot{\mathbf{v}} = F\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} \tag{I-35}$$

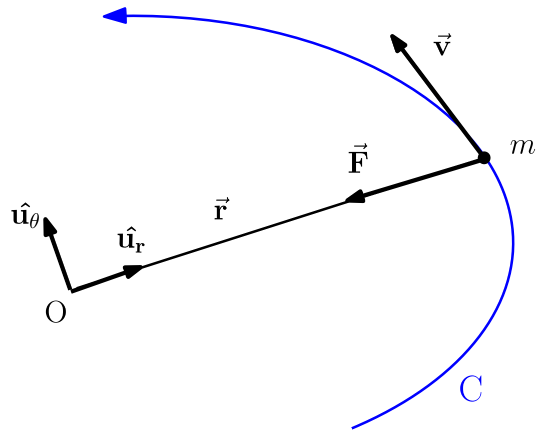

Figura 6:

y:

$$\vec{\mathbf{r}} \times m\,\dot{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times F\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r} = 0. \tag{I-36}$$

Si derivamos la expresión para la velocidad areolar, y consideramos el resultado de la ecuación (I-36), tenemos:

$$\ddot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left[(\dot{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}) + (\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}})\right] = \frac{1}{2}\,(\vec{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{v}}) = 0, \tag{I-37}$$

lo que indica que $\dot{\mathbf{A}}$ es un vector constante y que el movimiento se realiza en un plano perpendicular a él. Como de la ecuación (I-14) tenemos:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{A}, \tag{I-38}$$

el módulo de este vector constante es $\frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}h$. Entonces, el módulo del área barrida en un tiempo t se obtiene integrando la ecuación (I-38):

$$A = \frac{1}{2}ht + c, \tag{I-39}$$

donde c es una constante de integración. De esta última expresión se concluye que para cualquier fuerza central es válida la *segunda Ley de Kepler*.

Por otro lado, como podemos escribir la velocidad angular como $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = h/r^2$, se concluye que la velocidad angular en un movimiento debido a una fuerza central varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del origen a la partícula.

9. Integal del momento angular y energía:

De las ecuaciones (I-16) y (I-35) tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{r}} \times m\,\dot{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}} \times F\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = 0, \tag{I-40}$$

lo que implica que el momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula moviéndose bajo una fuerza central es constante en magnitud y dirección, siendo perpendicular al plano orbital.

Comparando las ecuaciones (I-13) y (I-14), y la definición de momento angular, vemos que:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\,\vec{\mathbf{v}} = 2m\,\dot{\mathbf{A}} = mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}_{\mathbf{A}}}, \tag{I-41}$$

lo que implica que el módulo del vector de momento angular es $|\vec{\mathbf{L}}| = mr^2\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = mh$ y $h\,\hat{\mathbf{u}_{\mathbf{A}}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Entonces, una *integral* de las ecuaciones de movimiento de una partícula con masa es el *valor constante para el momento angular*.

Partiendo nuevamente de la ecuación (I-35) y multiplicando escalarmente por $\vec{\mathbf{v}}$, tenemos:

$$m\,\vec{\mathbf{v}} \bullet \dot{\mathbf{v}} = F\,\vec{\mathbf{v}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}, \tag{I-42}$$

pero:

$$\vec{\mathbf{v}} \bullet \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{v}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \tag{I-43}$$

y por la ecuación (I-10):

$$\vec{\mathbf{v}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_{\theta}\right) \bullet \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{I-44}$$

entonces, la ecuación (I-42) se puede escribir como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{I-45}$$

Si, por ejemplo, suponemos que F depende del largo del radio vector, o sea $F = F(r)$, al integrar tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(r)\mathrm{d}r + \mathcal{E}, \tag{I-46}$$

donde $\mathcal{E}$ es una constante de integración que depende de las condiciones iniciales. La integral es el trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ al mover la partícula a lo largo de la órbita. Si el campo es conservativo existe una energía potencial $V(r)$ de modo que $F(r) = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, y se puede escribir la ecuación (I-46) como:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \mathcal{E}. \tag{I-47}$$

Esta es la LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA del sistema y $\mathcal{E}$ constituye una *segunda integral* de las ecuaciones de movimiento.

Una propiedad importante del movimiento bajo una fuerza central se obtiene resolviendo la ecuación (I-47) para v:

$$v = \pm\sqrt{(2/m)[\mathcal{E} - V(r)]}. \tag{I-48}$$

Como la raíz cuadrada depende de r sólo a través de $V(r)$, el módulo de la velocidad en cualquier órbita de igual energía total, independientemente de su forma, es la misma a una cierta distancia del centro de movimiento.

10. La ecuación de la órbita

Supongamos que la fuerza que actúa sobre la partícula es $\vec{\mathbf{F}}(r) = F(r)\,\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$. De las ecuaciones (I-11) y (I-38) y de la segunda Ley de Newton, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] &= F(r), \\ mr^2\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= mh. \end{aligned} \tag{I-49}$$

En su forma original estas ecuaciones diferenciales eran de segundo orden, por lo que su solución completa resultaría en cuatro constantes de integración. Como ya encontramos dos de ellas en las integrales de momento angular y energía, estas ecuaciones sólo proveen *dos integrales nuevas* y necesitamos obtener dos más para fijar la órbita completamente.

Definamos la recíproca del radio vector $u = 1/r$. Entonces, de la segunda ecuacion (I-49) tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = hu^2, \tag{I-50}$$

y también:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}, \\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2}. \end{aligned} \tag{I-51}$$

Reemplazando en la primera ecuación (I-49) y simplificando:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{F(1/u)}{mh^2u^2}, \tag{I-52}$$

que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden que permite obtener la ecuación de la órbita en coordenadas polares. Si utilizamos la Ley de Gravitación Universal, $F(r) =$

$-G\mathcal{M}m/r^2$, donde G es la constante de gravitación, $\mathcal{M}$ es la masa del cuerpo que ejerce la fuerza ($G\mathcal{M}$ es la potencia del centro de fuerza), y m es la masa sobre la que se aplica la fuerza, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{G\mathcal{M}}{h^2}. \tag{I-53}$$

Esta ecuación diferencial es integrable directamente con resultado:

$$u = \frac{G\mathcal{M}}{h^2} + A\,\cos(\theta - \theta_0), \tag{I-54}$$

donde A y θ_0 son *constantes de integración*, siendo la expresión para el radio vector:

$$r = \frac{(h^2/G\mathcal{M})}{1 + (Ah^2/G\mathcal{M})\,\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{I-55}$$

que corresponde a la ecuación polar de la órbita. Como la ecuación standard de una cónica es:

$$r = \frac{\mathcal{P}}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{I-56}$$

donde e es la excentricidad y $\mathcal{P}$ es el semilatus rectum (Figura 7). Comparando las ecuaciones (I-55) y (I-56) tenemos que:

$$\mathcal{P} = \frac{h^2}{G\mathcal{M}}, \qquad e = \frac{Ah^2}{G\mathcal{M}}, \tag{I-57}$$

constantes que permiten determinar si la forma de la cónica corresponde a una elipse, a una parábola o a una hipérbola para $e < 1$, $e = 1$, o $e > 1$, respectivamente.

Si a la ecuación (I-52) la multiplicamos por $2(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta)$ y la reformulamos, obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right] = \frac{2G\mathcal{M}}{h^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}, \tag{I-58}$$

que al integrar resulta en:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2G\mathcal{M}u}{h^2} + c, \tag{I-59}$$

donde c es una constante de integración. Esta ecuación tiene una interpretación física sencilla. Las dos componentes de la velocidad son:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = hu, \tag{I-60}$$

por lo que el lado izquierdo de la ecuación (I-59) es v^2/h^2. Por otra parte, $-G\mathcal{M}/r = -G\mathcal{M}u$ es la energía potencial por unidad de masa. Entonces, la ecuación (I-59) es:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\mathcal{M}mu = \frac{1}{2}h^2mc = \mathcal{E}, \tag{I-61}$$

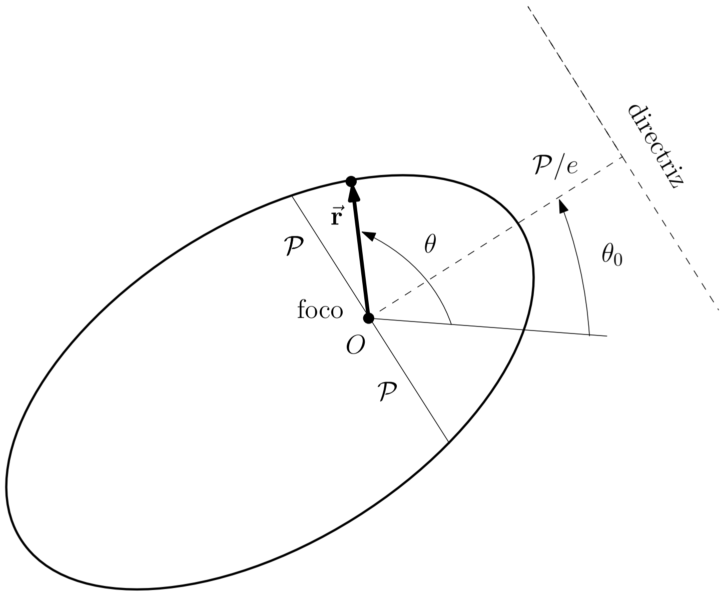

Figura 7:

donde $\mathcal{E}$ es la energía total y $c = 2\mathcal{E}/(mh^2)$. En los extremos del eje transversal de la cónica $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = -h(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta) = 0$ y la ecuación (I-59) es:

$$u^2 - \frac{2G\mathcal{M}u}{h^2} - \frac{2\mathcal{E}}{mh^2} = 0 \tag{I-62}$$

y:

$$u = \frac{G\mathcal{M}}{h^2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{mG^2\mathcal{M}^2}}\right]. \tag{I-63}$$

De las ecuaciones (I-54) y (I-63) tenemos:

$$\begin{aligned} u_{max} &= \tfrac{G\mathcal{M}}{h^2} + A &= \tfrac{G\mathcal{M}}{h^2}\left[1 + \sqrt{1 + \tfrac{2\mathcal{E}h^2}{mG^2\mathcal{M}^2}}\right], \\ u_{min} &= \tfrac{G\mathcal{M}}{h^2} - A &= \tfrac{G\mathcal{M}}{h^2}\left[1 - \sqrt{1 + \tfrac{2\mathcal{E}h^2}{mG^2\mathcal{M}^2}}\right], \end{aligned} \tag{I-64}$$

y entonces:

$$A = \frac{G\mathcal{M}}{h^2}\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{mG^2\mathcal{M}^2}}. \tag{I-65}$$

Pero por la ecuación (I-57) $e = Ah^2/(G\mathcal{M})$, asi que tenemos una relación fundamental entre la excentricidad y la energía total de la partícula:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{mG^2\mathcal{M}^2}}. \tag{I-66}$$

Loa tres casos posibles son:

1. $\mathcal{E} = 0$, $e = 1$ (parábola): Si designamos con q la distancia del foco al vértice, tenemos:

$$\mathcal{P} = \frac{h^2}{G\mathcal{M}} = 2q, \tag{I-67}$$

y la ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{I-68}$$

De la ecuación (I-61) tenemos que la velocidad en la órbita a una distancia r del centro de fuerza es:

$$v_p = \sqrt{2G\mathcal{M}/r}, \tag{I-69}$$

que es la velocidad a la cual una partícula a una distancia r del centro de fuerza se escapará al infinito y que se denomina VELOCIDAD DE ESCAPE.

2. $\mathcal{E} < 0$, $e < 1$ (elipse): Si designamos con q el radio vector del vértice de la elipse más cercano al origen, y como Q el radio vector del vértice más lejano, siendo el eje mayor de la elipse es $2a$, tenemos:

$$q = \frac{\mathcal{P}}{1 + e} \qquad Q = \frac{\mathcal{P}}{1 - e}, \tag{I-70}$$

y:

$$q + Q = 2a. \tag{I-71}$$

De estas ecuaciones encontramos que $\mathcal{P} = a(1 - e^2)$, y la ecuación de la elipse es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{I-72}$$

Además, como $\mathcal{P} = h^2/(G\mathcal{M})$, la velocidad areolar constantes está dada por:

$$h = \sqrt{G\mathcal{M}a(1 - e^2)}. \tag{I-73}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (I-66) y simplificando, encontramos que la energía total es:

$$\mathcal{E} = -\frac{G\mathcal{M}m}{2a}, \tag{I-74}$$

y la ecuación (I-61) nos da la velocidad orbital a la distancia r del centro de fuerza:

$$v^2 = G\mathcal{M}\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]. \tag{I-75}$$

Si ahora designamos por A el área barrida por el radio vector en un tiempo t, por las ecuaciones (I-39) y (I-73) tenemos:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{G\mathcal{M}a(1 - e^2)}\,t + c, \tag{I-76}$$

siendo c una constante de integración. En un período completo P, el radio vector cubre un área:

$$\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{G\mathcal{M}a(1-e^2)}P, \tag{I-77}$$

donde $b = a\sqrt{1-e^2}$ es el semieje menor de la elipse. Entonces:

$$P = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G\mathcal{M}}}, \tag{I-78}$$

que corresponde a la *tercera Ley de Kepler* cuando se aplica al Sistema Solar. Formalmente, $\mathcal{M}$ es casi la misma para todos los planetas, por lo cual $2\pi/\sqrt{G\mathcal{M}}$ es casi una constante.

3. $\mathcal{E} > 0$, $e > 1$ (hipérbola): Designemos el eje transversal de la cónica como $2a$. La geometría de la órbita indica que $\mathcal{P} = a(e^2-1)$ y la ecuación de la hipérbola es:

   $$r = \frac{a(e^2-1)}{1 + e\,\cos(\theta-\theta_0)}. \tag{I-79}$$

   La velocidad areolar constante es:

   $$h = \sqrt{G\mathcal{M}a(e^2-1)}, \tag{I-80}$$

   y la energía total será:

   $$\mathcal{E} = \frac{G\mathcal{M}m}{2a}. \tag{I-81}$$

   A una distancia r del centro de fuerza la velocidad será:

   $$v^2 = G\mathcal{M}\left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right] \tag{I-82}$$

En el análisis precedente de un movimiento bajo una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia se verifica que el centro de fuerza está en el foco de la cónica, confirmando la *primera Ley de Kepler*.