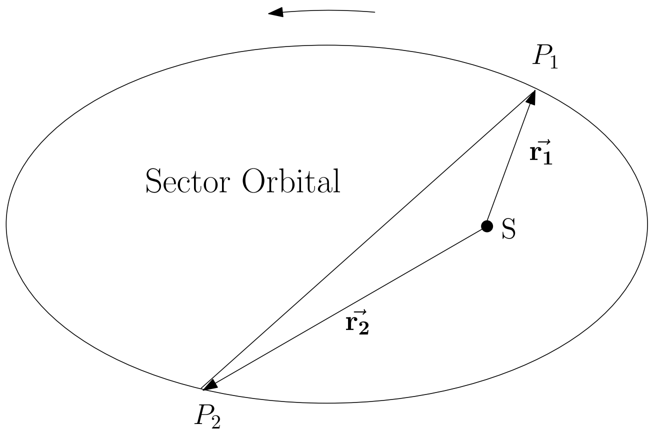

Figura 12:

Unidad III. Determinación de órbitas

En la unidad precedente se trató el problema básico de determinar la posición y velocidad de un objeto a partir de sus elementos orbitales o viceversa. En esta unidad veremos cómo determinar los elementos orbitales a partir de observaciones angulares realizadas desde la Tierra. Este no es un problema simple debido a que no se conoce la distancia al objeto y debemos trabajar mediante procesos iterativos a partir de una estimación previa.

Como necesitados determinar seis elementos orbitales, necesitamos obtener observaciones que provean seis cantidades independientes. Como cada observación provee dos coordenadas (ascención recta y declinación, o longitud y latitud eclíptica), se requieren tres observaciones para tres instantes diferentes. Supondremos que estas coordenadas son geocéntricas y han sido corregidas por aberración, precesión, nutación, y cualquier otra irregularidad de la rotación terrestre.

1. El método de iteración en $\mathcal{P}$ de Herrick y Liu:

Antes de embarcarnos en la discusión del problema descripto más arriba consideraremos un caso particular donde se conocen dos radios vectores del objeto para dos instantes diferentes. Este tipo de problema es de importancia para el cálculo de órbitas de transferencia, encuentros entre dos vehículos espaciales, etc. Si bien existen varios métodos para resolver este tipo de problema, describiremos un método propuesto por Herrick y Liu que es bastante sencillo y consiste en iterar sobre el valor del semilatus rectum $\mathcal{P}$.

Supongamos que son conocidas dos posiciones del objeto, $\vec{\mathbf{r_1}} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{r_2}} = (x_2, y_2, z_2)$, y el intervalo entre ambos instantes es $\Delta t = t_2 - t_1$. Si además tenemos que f_1 y f_2 son las respectivas anomalías verdaderas para ambos instantes, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \cos(f_2 - f_1) &= \frac{\vec{\mathbf{r_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2}}}{r_1 r_2}, \\ \sin(f_2 - f_1) &= Y\sqrt{1 - \cos^2(f_2 - f_1)}, \end{aligned} \tag{III-1}$$

donde la constante Y toma valores de -1 o 1 si las dos posiciones definen una región de la órbita que contiene o no el centro de fuerza, respectivamente. Por ejemplo, en la Figura 12 ambas posiciones definen un sector orbital que no contiene al centro de fuerza S y, en este caso, $Y = 1$. Entonces, si expresamos las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en función de las anomalías verdaderas mediante la ecuación (II-74), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{r_2}{\mathcal{P}}\left[\cos(f_2 - f_1) - 1\right] + 1, \\ \mathcal{G} &= \frac{r_1 r_2}{\sqrt{G\mathcal{M}\mathcal{P}}}\sin(f_2 - f_1), \end{aligned} \tag{III-2}$$

de donde es posible encontrar un valor para la velocidad mediante:

$$\vec{\mathbf{v_1}} = \frac{\vec{\mathbf{r_2}} - \mathcal{F}\vec{\mathbf{r_1}}}{\mathcal{G}}, \tag{III-3}$$

siempre que $\mathcal{G} \neq 0$. Entonces, si estimamos $\mathcal{P}$ en las ecuaciones (III-2), podemos calcular un valor para $\vec{\mathbf{v_1}}$ mediante la ecuación (III-3), y con los vectores $\vec{\mathbf{r_1}}$ y $\vec{\mathbf{v_1}}$ encontrar una estimación $\vec{\mathbf{r_2'}}$ para t_2. Con esta nueva estimación es posible recalcular el coseno del ángulo entre $\vec{\mathbf{r_1}}$ y $\vec{\mathbf{r_2'}}$:

$$\cos'(f_2 - f_1) = \frac{\vec{\mathbf{r_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2'}}}{r_1 r_2'}. \tag{III-4}$$

Si comparamos este nuevo valor con el calculado en la ecuación (III-1), podemos ajustar el valor de $\mathcal{P}$ en:

$$\Delta\mathcal{P} = \cos(f_2 - f_1) - \cos'(f_2 - f_1). \tag{III-5}$$

Si repetimos este proceso hasta que $\Delta\mathcal{P} = 0$ obtendremos un valor definitivo para $\vec{\mathbf{v_1}}$. Un punto importante a considerar es que cada vez que se obtiene un nuevo valor de $\mathcal{G}$, para que sea válido debe tener el mismo signo que la constante Y. Si este no es el caso, la solución es falsa y se debe realizar una nueva búsqueda.

2. El método de Laplace:

Cuando se cuenta con tres observaciones angulares de un objeto es posible encontrar una órbita preliminar utilizando un método propuesto por Laplace a principios del siglo XIX.

Los datos observacionales son pares de coordenadas eclípticas geocéntricas (λ, β) para tres instantes t_1, t_0, y t_3, de tal modo que $t_1 < t_0 < t_3$. Cada observación puede representarse por un vector unitario ($\hat{\mathbf{u_1}}$, $\hat{\mathbf{u_0}}$, $\hat{\mathbf{u_3}}$) de modo que:

$$\hat{\mathbf{u}} = (\cos\lambda\cos\beta)\,\hat{\xi} + (\sin\lambda\cos\beta)\,\hat{\eta} + \sin\beta\,\hat{\zeta}, \tag{III-6}$$

donde $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$, y $\hat{\zeta}$ forman un sistema eclíptico geocéntrico [ecuación (II-86)]. Utilizando la ecuación (II-85) podemos escribir el radio vector del objeto para un instante dado como:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r_\oplus}} + \vec{\rho} = \vec{\mathbf{r_\oplus}} + \rho\hat{\mathbf{u}}, \tag{III-7}$$

y, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r_\oplus}} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}} + \rho\dot{\hat{\mathbf{u}}}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r_\oplus}} + \frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}\hat{\mathbf{u}} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \rho\ddot{\hat{\mathbf{u}}}. \end{aligned} \tag{III-8}$$

Si tomamos $k^2\mathcal{M} = 1$, la ecuación (II-11) es $\ddot{\mathbf{r}} = -\vec{\mathbf{r}}/r^3$. Reemplazando en la segunda ecuación (III-8):

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}\hat{\mathbf{u}} + 2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \rho\ddot{\hat{\mathbf{u}}} = -\left(\ddot{\mathbf{r_\oplus}} + \frac{\vec{\mathbf{r}}}{r^3}\right). \tag{III-9}$$

Si aplicamos el triple producto escalar por $\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet$ en la ecuación (III-9) y utilizamos la ecuación (III-7) para simplificar, encontramos que:

$$\rho\left[\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\ddot{\hat{\mathbf{u}}}\right] = -\left(\left[\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\ddot{\mathbf{r_\oplus}}\right] + \frac{\left[\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\vec{\mathbf{r_\oplus}}\right]}{r^3}\right). \tag{III-10}$$

Esta última ecuación es de la forma:

$$\rho = B_1 + \frac{B_2}{r^3}, \tag{III-11}$$

donde:

$$B_1 = -\frac{\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\ddot{\mathbf{r_\oplus}}}{\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\ddot{\hat{\mathbf{u}}}} \qquad B_2 = -\frac{\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\vec{\mathbf{r_\oplus}}}{\hat{\mathbf{u}}\times\dot{\hat{\mathbf{u}}}\bullet\ddot{\hat{\mathbf{u}}}}. \tag{III-12}$$

Una segunda relación se obtiene de la ley del coseno:

$$r^2 = r_\oplus^2 + \rho^2 + 2\rho\left(\hat{\mathbf{u}}\bullet\vec{\mathbf{r_\oplus}}\right). \tag{III-13}$$

El problema se reduce a resolver iterativamente para ρ y r las ecuaciones (III-11) y (III-13) para el instante t_0, lo que implica el conocimiento de los escalares B_1 y B_2 que dependen de las posiciones observadas y de $\vec{\mathbf{r}_\oplus}$.

Como la posición de la Tierra es conocida el valor de $\ddot{\mathbf{r}}_\oplus$ también es conocido, por lo que sólo necesitamos los valores de $\dot{\hat{\mathbf{u}}}$ y $\ddot{\hat{\mathbf{u}}}$ para encontrar B_1 y B_2. Dado que estamos considerando que $k^2\mathcal{M} = 1$, los intervalos entre la observación del medio y la primera, y entre la del medio y la última son $\tau_1 = k(t_1 - t_0)$ y $\tau_3 = k(t_3 - t_0)$, respectivamente. Entonces podemos desarrollar en serie de Taylor los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1}$ y $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} &= \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0} + \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_1^2 + \cdots, \\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3} &= \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0} + \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_3 + \tfrac{1}{2}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_3^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{III-14}$$

Si las observaciones no están muy separadas en el tiempo, podemos truncar los desarrollos para incluir los términos hasta el segundo grado en τ, lo que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} - \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0} &= \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_1^2, \\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3} - \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0} &= \dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_3 + \tfrac{1}{2}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}\tau_3^2. \end{aligned} \tag{III-15}$$

Como $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1}$, $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3}$, τ_1, y τ_3 son conocidas, es posible utilizar las ecuaciones (III-15) para encontrar $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}$ y $\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}$ y resolver B_1 y B_2. Si se dispone de más observaciones es posible considerar más términos en las ecuaciones (III-14) y lograr mayor exactitud en la determinación de $\dot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}$ y $\ddot{\hat{\mathbf{u}}}_\mathbf{0}$.

Luego de encontrar $\vec{\mathbf{r}_\mathbf{0}}$ mediante la ecuación (III-7) necesitamos alguna forma de obtener $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$, para lo cual se requiere conocer $\mathrm{d}\rho_\mathbf{0}/\mathrm{d}t$. Este valor se puede obtener multiplicando la segunda ecuación (III-8) [o la ecuación (III-9)] por $\bullet(\hat{\mathbf{u}} \times \ddot{\hat{\mathbf{u}}})$:

$$2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\hat{\mathbf{u}}} \bullet \hat{\mathbf{u}} \times \ddot{\hat{\mathbf{u}}}\right] = -\left(\left[\ddot{\mathbf{r}}_\oplus \bullet \hat{\mathbf{u}} \times \ddot{\hat{\mathbf{u}}}\right] + \frac{\left[\vec{\mathbf{r}_\oplus} \bullet \hat{\mathbf{u}} \times \ddot{\hat{\mathbf{u}}}\right]}{r^3}\right), \tag{III-16}$$

donde las cantidades entre corchetes y el valor de r_0 son conocidos para $t = 0$, por lo cual puede calcularse el valor de $\mathrm{d}\rho_0/\mathrm{d}t$ y utilizar la primera ecuación (III-8) para encontrar $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$. Conocido este valor, se puede utilizar el procedimiento detallado en la unidad II, sección 7, para encontrar los elementos orbitales de una órbita preliminar.

Por último, es importante mencionar que hay algunos casos donde tres observaciones no son suficientes para obtener una órbita preliminar. Por ejemplo, supongamos que la órbita real tenga $i = 0^o$ y por lo tanto no es necesario determinar Ω, reduciendo los elementos a determinar a solo cuatro. Lamentablemente, en este caso todas las latitudes eclípticas son $\beta = 0^o$, sólo nos quedarán las tres longitudes eclípticas y una latitud eclíptica, y necesitaremos dos observaciones más para definir la órbita.

3. El método de Gauss:

El método de Laplace que vimos en la sección anterior provee una órbita que se ajusta exactamente a la observación central. En el método de Gauss que veremos ahora se obtiene una órbita que ajusta exactamente a dos observaciones.

Sean $\vec{\mathbf{r_1}}$, $\vec{\mathbf{r_2}}$, y $\vec{\mathbf{r_3}}$ las posiciones del objeto en los instantes t_1, t_2, y t_3 dadas en coordenadas eclípticas heliocéntricas. Como el movimento se realiza en un plano, uno cualquiera de estos vectores es combinación lineal de los otros dos. Entonces, asumiendo que los vectores no son colineales, tenemos:

$$\vec{\mathbf{r_2}} = c_1\vec{\mathbf{r_1}} + c_3\vec{\mathbf{r_3}}, \tag{III-17}$$

donde c_1 y c_3 son constantes. Utilizando las ecuaciones (III-7) y (III-8), podemos escribir:

$$c_1\rho_1\hat{\mathbf{u_1}} + c_3\rho_3\hat{\mathbf{u_3}} - \rho_2\hat{\mathbf{u_2}} = \vec{\mathbf{r_{\oplus 2}}} - c_1\vec{\mathbf{r_{\oplus 1}}} - c_3\vec{\mathbf{r_{\oplus 3}}}, \tag{III-18}$$

donde $\hat{\mathbf{u_1}}$, $\hat{\mathbf{u_2}}$, y $\hat{\mathbf{u_3}}$ son vectores unitarios eclípticos geocéntricos en dirección a las observaciones, y $\vec{\mathbf{r_{\oplus 1}}}$, $\vec{\mathbf{r_{\oplus 2}}}$, y $\vec{\mathbf{r_{\oplus 3}}}$ corresponden a las posiciones eclípticas heliocéntricas de la Tierra para los tres instantes. A partir de ésta última ecuación, si los valores de las constantes c_1 y c_3 se conocen es posible resolver las ecuaciones para cada componente y encontrar ρ_1, ρ_2 y ρ_3.

Tomando el producto vectorial de $\vec{\mathbf{r_1}}$ y $\vec{\mathbf{r_3}}$ por la ecuación (III-17) tenemos:

$$\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_2}} = c_3\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_3}} \qquad \vec{\mathbf{r_2}} \times \vec{\mathbf{r_3}} = c_1\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_3}}, \tag{III-19}$$

pero $|\vec{\mathbf{r_1}}\times\vec{\mathbf{r_2}}|$, $|\vec{\mathbf{r_2}}\times\vec{\mathbf{r_3}}|$ y $|\vec{\mathbf{r_1}}\times\vec{\mathbf{r_3}}|$ es el doble de las áreas triangulares formadas por esos vectores, respectivamente. Además, como $\vec{\mathbf{r_1}}$, $\vec{\mathbf{r_2}}$, y $\vec{\mathbf{r_3}}$ son coplanares, estos productos vectoriales son colineales. Entonces, podemos escribir:

$$[r_1, r_2] = |\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_2}}| \qquad [r_1, r_3] = |\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_3}}| \qquad [r_2, r_3] = |\vec{\mathbf{r_2}} \times \vec{\mathbf{r_3}}|, \tag{III-20}$$

y:

$$c_1 = \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} \qquad c_3 = \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]}. \tag{III-21}$$

Para encontrar c_1 y c_3 Gauss propuso utilizar las relaciones entre los sectores elípticos y los triángulos respectivos. Si indicamos con (r_1, r_2), (r_1, r_3), y (r_2, r_3) los sectores elípticos delimitados por esos radios, las relaciones sector triángulo son:

$$\overline{y_1} = \frac{(r_2, r_3)}{[r_2, r_3]} \qquad \overline{y_2} = \frac{(r_1, r_3)}{[r_1, r_3]} \qquad \overline{y_3} = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]}, \tag{III-22}$$

y podemos escribir:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(r_2, r_3)}{\overline{y_1}} \frac{\overline{y_2}}{(r_1, r_3)} &= \frac{(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_1)} \frac{\overline{y_2}}{\overline{y_1}} \\ c_3 &= \frac{(r_1, r_2)}{\overline{y_3}} \frac{\overline{y_2}}{(r_1, r_3)} &= \frac{(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_1)} \frac{\overline{y_2}}{\overline{y_3}}. \end{aligned} \tag{III-23}$$

Los últimos términos en la ecuación (III-23) provienen de la segunda Ley de Kepler. Para encontrar los valores de c_1 y c_3 debo calcular primero los valores para las relaciones entre los sectores elípticos y los triángulos respectivos $\overline{y}$. Para $\overline{y_3}$ tenemos:

$$\overline{y_3} = \frac{(r_1, r_2)}{[r_1, r_2]} = \frac{|\vec{\mathbf{r_1}} \times \dot{\mathbf{r_1}}|}{|\vec{\mathbf{r_1}} \times \vec{\mathbf{r_2}}|}(t_2 - t_1).$$

Utilizando $\vec{\mathbf{r_2}} = \mathcal{F}_{12}\,\vec{\mathbf{r_1}} + \mathcal{G}_{12}\,\dot{\mathbf{r_1}}$ para reemplazar $\dot{\mathbf{r_1}}$ y simplificando obtenemos que:

$$\overline{y_3} = \frac{(t_2 - t_1)}{\mathcal{G}_{12}}. \tag{III-24}$$

Como se puede expresar $\mathcal{G}_{12}$ en función de $\vec{\mathbf{r_1}}$ truncando la ecuación (II-78) para exponentes mayores que 3, podemos obtener valores para los $\overline{y}$, y para los c_1 y c_3, conociendo sólo las posiciones mediante un proceso iterativo. Partiendo de valores iniciales para c_1 y c_3, se resuelve la ecuación (III-18) en sus componentes para encontrar ρ_1, ρ_2 y ρ_3. A partir de estos valores se encuentran las distancias heliocéntricas mediante la ecuación (III-7), y utilizando las ecuaciones (III-23) y (III-24) se obtienen nuevos valores para c_1 y c_3. Para obtener los valores iniciales de estas constantes podemos asumir en una primera aproximación que $\overline{y_2}/\overline{y_1} = \overline{y_2}/\overline{y_3} = 1$ y entonces:

$$c_1 = \frac{(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_1)} \qquad c_3 = \frac{(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_1)}. \tag{III-25}$$

Finalmente, conocidos los valores para dos radios heliocéntricos se puede aplicar el método de Herrick y Liu para encontrar uno de los dos vectores de velocidad y determinar la órbita.

4. La relación entre las áreas del sector orbital y el triángulo:

La ecuación (III-24) para calcular la relación entre las áreas del sector elíptico y el triángulo utiliza la función $\mathcal{G}$ cuyo valor se obtiene en este caso de una serie truncada para grados superiores al tercero. En lugar de utilizar esta expresión aproximada es posible obtener valores para $\overline{y}$ mediante el uso de una serie hipergeométrica.

Si conocemos los radios r_0 y r_1 y el ángulo entre ellos $\Delta f = f_1 - f_0$, por definición tenemos que:

$$\overline{y} = \frac{(r_0, r_1)}{[r_0, r_1]} = \frac{|\vec{\mathbf{r_0}} \times \dot{\mathbf{r_0}}|}{|\vec{\mathbf{r_0}} \times \vec{\mathbf{r_1}}|}(t_1 - t_0), \tag{III-26}$$

lo cual se puede escribir como:

$$\overline{y} = \frac{h(t_1 - t_0)}{r_0 r_1 \sin \Delta f} = \frac{\sqrt{G\mathcal{M}\mathcal{P}}(t_1 - t_0)}{r_0 r_1 \sin \Delta f} = \frac{\sqrt{\mathcal{P}}\Delta t}{r_0 r_1 \sin \Delta f}, \tag{III-27}$$

donde se asume que $G\mathcal{M} = 1$ y $\Delta t = k(t_1 - t_0)$. Si en principio asumimos que la órbita es elíptica, utilizando las ecuaciones (II-18) y (II-35) se puede escribir:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r} \sin\left(\frac{f}{2}\right) &= \sqrt{a(1+e)} \sin\left(\frac{E}{2}\right), \\ \sqrt{r} \cos\left(\frac{f}{2}\right) &= \sqrt{a(1-e)} \cos\left(\frac{E}{2}\right), \\ \frac{(t-T)}{a^{3/2}} &= E - e \sin E. \end{aligned}\right] \tag{III-28}$$

Si multiplicamos la primera y la segunda de las ecuaciones (III-28) aplicadas a t_1 y t_0, respectivamente, y restamos el producto de las aplicadas a t_0 y t_1; multiplicamos entre sí la primera aplicada a t_0 y t_1, multiplicamos entre sí la segunda aplicada a t_0 y t_1, y sumamos, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r_0 r_1} \sin\left(\frac{f_1}{2} - \frac{f_0}{2}\right) &= \sqrt{a}\sqrt{\mathcal{P}} \sin\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right), \\ \sqrt{r_0 r_1} \cos\left(\frac{f_1}{2} - \frac{f_0}{2}\right) &= a \cos\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right) - ae \cos\left(\frac{E_1}{2} + \frac{E_0}{2}\right). \end{aligned}\right] \tag{III-29}$$

Si recordamos que $r = a(1 - e\cos E)$, también podemos escribir:

$$r_0 + r_1 = 2a - 2ae \cos\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right) \cos\left(\frac{E_1}{2} + \frac{E_0}{2}\right), \tag{III-30}$$

que permite eliminar $e\cos[(E_1 + E_0)/2]$ de la segunda ecuación (III-29):

$$r_0 + r_1 - 2\sqrt{r_0 r_1} \cos\left(\frac{f_1}{2} - \frac{f_0}{2}\right) \cos\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right) = 2a \sin^2\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right). \tag{III-31}$$

Por otra parte, aplicando a t_0 y t_1 la última ecuación (III-28), se obtiene:

$$\frac{\Delta t}{a^{3/2}} = (E_1 - E_0) - 2e \sin\left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2}\right) \cos\left(\frac{E_1}{2} + \frac{E_0}{2}\right),$$

de donde es posible eliminar $e\cos[(E_1+E_0)/2]$ usando una vez más la ecuación (III-30):

$$\frac{\Delta t}{a^{3/2}} = 2(E_1-E_0) - \sin(E_1-E_0) + 2\frac{\sqrt{r_0 r_1}}{a}\sin\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\right)\cos\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right). \qquad \text{(III-32)}$$

También se puede reemplazar $\sqrt{\mathcal{P}}$ en la ecuación (III-27) utilizando la primera ecuación (III-29):

$$\overline{y} = \frac{\Delta t}{2\sqrt{a}\sqrt{r_0 r_1}\cos\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)\sin\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\right)}, \qquad \text{(III-33)}$$

que permite eliminar a de las ecuaciones (III-31) y (III-32) para obtener:

$$\left.\begin{aligned} & r_0+r_1-2\sqrt{r_0 r_1}\cos\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)\left(1-2\sin^2\left(\frac{E_1}{4}-\frac{E_0}{4}\right)\right) = \frac{(\Delta t)^2}{2\overline{y}^2 r_0 r_1\cos^2\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)}, \\ & \frac{8\overline{y}^3(r_0r_1)^{3/2}\cos^3\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)\sin^3\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\right)}{(\Delta t)^2} = \\ & \qquad = (E_1-E_0)-\sin(E_1-E_0)+\frac{8\overline{y}^2(r_0r_1)^{3/2}\cos^3\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)\sin^3\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\right)}{(\Delta t)^2}. \end{aligned}\right] \qquad \text{(III-34)}$$

Si definimos:

$$\phi = \frac{(\Delta t)^2}{\left(2\sqrt{r_0r_1}\cos\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)\right)^3}, \qquad \sigma = \frac{r_0+r_1}{4\sqrt{r_0r_1}\cos\left(\frac{f_1}{2}-\frac{f_0}{2}\right)} - \frac{1}{2},$$

podemos escribir las ecuaciones (III-34) como:

$$\overline{y}^2 = \frac{\phi}{\sigma+\sin^2\left(\frac{E_1}{4}-\frac{E_0}{4}\right)}, \qquad \overline{y}^3-\overline{y}^2 = \frac{\phi(E_1-E_0-\sin(E_1-E_0))}{\sin^3\left(\frac{E_1}{2}-\frac{E_0}{2}\right)}. \qquad \text{(III-35)}$$

Para resolver las ecuaciones (III-35), Gauss encontró que podía expresar la segunda de esas ecuaciones como $\overline{y}^3-\overline{y}^2 = 4\phi\mathcal{Q}(E_1-E_0)/3$, donde:

$$\mathcal{Q}(\theta) = \frac{3}{4}\left[\frac{\theta-\sin(\theta)}{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]. \qquad \text{(III-36)}$$

Si ahora definimos que:

$$\kappa = \sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right),$$

para $\theta = E_1-E_0$, podemos considerar que $\mathcal{Q}$ es función de κ. Si diferenciamos $\mathcal{Q}$ y reacomodando encontramos que:

$$\frac{2}{3}\kappa(1-\kappa)\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\kappa} + (1-2\kappa)\mathcal{Q} = 1,$$

la cual puede ser resuelta en potencias de κ e integrada término a término. El resultado es que $\mathcal{Q}$ puede expresarse mediante una serie hipergeométrica:

$$\mathcal{Q}(\kappa) = F\left(1, 3, \frac{5}{2}; \kappa\right), \tag{III-37}$$

donde:

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}x^2 + \cdots .$$

Además, es posible encontrar una solución analítica si $0 < \kappa \leq 0{,}5$:

$$\mathcal{Q} = \frac{3}{16}(\kappa - \kappa^2)^{-3/2}\left[2(2\kappa-1)(\kappa-\kappa^2)^{1/2} + \arcsin(2\kappa-1) + \frac{\pi}{2}\right], \tag{III-38}$$

y si $\kappa < 0$:

$$\mathcal{Q} = \frac{3}{16}(\kappa^2 - \kappa)^{-3/2}\left[2(1-2\kappa)(\kappa^2-\kappa)^{1/2} - \ln\{1 - 2\kappa + 2(\kappa^2-\kappa)^{1/2}\}\right]. \tag{III-39}$$

La serie no es eficiente para $|\kappa| > 0{,}025$, y las expresiones analíticas no son eficientes para κ cercana a cero. Por otras parte, al permitir que κ sea negativo permite utilizar las ecuaciones (III-35) tanto para órbitas elípticas como hiperbólicas.

Para resolver las ecuaciones (III-35) hay que partir de una estimación para $\overline{y}$ e iterar con:

$$\left.\begin{aligned} \kappa =& \ \frac{\phi}{\overline{y}^2} - \sigma, \\ \overline{y} =& \ 1 + \left(\frac{\phi}{\overline{y}^2}\right)\frac{4}{3}\mathcal{Q}(\kappa). \end{aligned}\right] \tag{III-40}$$

Un buen valor inicial es $\overline{y} = 1$.

5. El método de Gauss - Encke - Merton:

Al intentar determinar una órbita mediante el método de Gauss se debe trabajar con tres ecuaciones como la (III-18), una para cada componente, para encontrar las distancias geocéntricas para los instantes de las tres observaciones. Lamentablemente, estas ecuaciones están mal condicionadas y es conveniente realizar una transformación geométrica para facilitar el cálculo.

La transformación fue propuesta por Cunningham en 1946. Se introducen ejes geocéntricos ortogonales (ξ', η', ζ') de tal forma que el eje ξ' apunte a la primer observación ($\hat{\xi}' = \mathbf{\hat{u}_1}$) y que la dirección a la tercera observación ($\mathbf{\hat{u}_3}$) corte el eje η'. Por lo tanto:

$$\hat{\eta}' = \frac{\mathbf{\hat{u}_1} \times (\mathbf{\hat{u}_3} \times \mathbf{\hat{u}_1})}{|\mathbf{\hat{u}_1} \times (\mathbf{\hat{u}_3} \times \mathbf{\hat{u}_1})|} = \frac{\mathbf{\hat{u}_3} - \mathbf{\hat{u}_1}(\mathbf{\hat{u}_3} \bullet \mathbf{\hat{u}_1})}{\sqrt{1 - (\mathbf{\hat{u}_3} \bullet \mathbf{\hat{u}_1})^2}},$$

y:

$$\hat{\zeta}' = \hat{\xi}' \times \hat{\eta}'.$$

Las componentes de los vectores unitarios $\mathbf{\hat{u_1}}$, $\mathbf{\hat{u_2}}$, y $\mathbf{\hat{u_3}}$ en el sistema de coordenadas transformado se encuentran calculando los productos escalares de esos vectores con los vectores $\hat{\xi}'$, $\hat{\eta}'$, y $\hat{\zeta}$. Debido a la transformación la segunda y tercera componente de $\mathbf{\hat{u_1}}$ y la tercera componente de $\mathbf{\hat{u_3}}$ son cero. Entonces, la ecuación (III-18) para la tercera componente será simplemente:

$$-\rho_2(\mathbf{\hat{u_2}} \bullet \hat{\zeta}') = z_{\oplus 2} - c_1 z_{\oplus 1} - c_3 z_{\oplus 3}, \tag{III-41}$$

de donde se puede encontrar ρ_2. De la ecuación para la segunda componente se obtiene:

$$\rho_3 = \frac{\rho_2(\mathbf{\hat{u_2}} \bullet \hat{\eta}') - c_1 y_{\oplus 1} + y_{\oplus 2} - c_3 y_{\oplus 3}}{c_3(\mathbf{\hat{u_3}} \bullet \hat{\eta}')}, \tag{III-42}$$

y de la ecuación para la primera componente:

$$\rho_1 = \frac{\rho_2(\mathbf{\hat{u_2}} \bullet \hat{\xi}') - c_3\rho_3(\mathbf{\hat{u_3}} \bullet \hat{\xi}') - c_1 x_{\oplus 1} + x_{\oplus 2} - c_3 x_{\oplus 3}}{c_1}. \tag{III-43}$$

Si modificamos el método de Gauss para incluir el cálculo directo de la relación entre las áreas del sector elíptico y triángulo, y aplicamos la transformación geométrica propuesta por Cunningham obtenemos el *método de Gauss - Encke - Merton*. Si partimos de valores iniciales para c_1 y c_3 obtenidos mediante las ecuaciones (III-24), se resuelven las ecuaciones (III-41), (III-42) y (III-43) para encontrar ρ_1, ρ_2 y ρ_3. A partir de estos valores se encuentran las distancias heliocéntricas mediante la ecuación (III-7), y utilizando las ecuaciones (III-40) se obtienen nuevos valores para $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, e $\overline{y_3}$. Por último, se recalculan los valores de c_1 y c_3 mediante las ecuaciones (III-23) y se itera nuevamente hasta la convergencia.

Una vez que se conocen los valores de $\overline{y}$, ρ, y las distancias heliocéntricas se puede utilizar el método de Herrick y Liu para encontrar uno de los vectores de velocidad o calcularla directamente mediante las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ y la ecuación (III-3). En este último caso, considerando las dos primeras posiciones, tenemos que:

$$\vec{\mathbf{v_1}} = \frac{\vec{\mathbf{r_2}} - \mathcal{F}_{12}\vec{\mathbf{r_1}}}{\mathcal{G}_{12}}.$$

La función $\mathcal{F}$ se obtiene de la ecuación (II-75):

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{a}{r_1}\left[\cos(E_2 - E_1) - 1\right] + 1 = 1 - \frac{2}{r_1} a \sin^2\left(\frac{E_2}{2} - \frac{E_1}{2}\right),$$

pero de la ecuación (III-31) y la primera (III-34) tenemos que:

$$a \sin^2\left(\frac{E_2}{2} - \frac{E_1}{2}\right) = \frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{4\overline{y_3}^2 r_1 r_2 \cos^2\left(\frac{f_2}{2} - \frac{f_1}{2}\right)},$$

donde $2\sqrt{r_1 r_2}\cos[(f_2 - f_1)/2] = \sqrt{2(r_1 r_2 + \vec{\mathbf{r_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2}})}$. Entonces:

$$\mathcal{F}_{12} = 1 - \frac{k^2(t_2 - t_1)^2}{(r_1 r_2 + \vec{\mathbf{r_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2}})\overline{y_3}^2 r_1},$$

y, de la ecuación (III-24):

$$\mathcal{G}_{12} = \frac{(t_2 - t_1)}{\overline{y_3}}.$$

6. El método de Moulton - Väisälä - Cunningham:

Este método no utiliza la ecuación (III-18) ni la relación entre las áreas del sector elíptico y el triángulo, sino que se basa en la descomposición de los vectores mediante las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Si expresamos los vectores $\vec{\mathbf{r_1}}$ y $\vec{\mathbf{r_3}}$ en función del vector $\vec{\mathbf{r_2}}$ mediante las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, y escribimos los tres vectores de posición en el formato usado en la ecuación (III-7), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_{21}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}_{21}\vec{\mathbf{v_2}} &= \vec{\mathbf{r}_{\oplus 1}} + \rho_1 \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \\ \vec{\mathbf{r_2}} &= \vec{\mathbf{r}_{\oplus 2}} + \rho_2 \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2}, \\ \mathcal{F}_{23}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}_{23}\vec{\mathbf{v_2}} &= \vec{\mathbf{r}_{\oplus 3}} + \rho_3 \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3}. \end{aligned}\right] \tag{III-44}$$

Utilizando estas expresiones se puede escribir la ecuación (III-17) como:

$$\vec{\mathbf{r_2}} = c_1(\mathcal{F}_{21}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}_{21}\vec{\mathbf{v_2}}) + c_3(\mathcal{F}_{23}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}_{23}\vec{\mathbf{v_2}}),$$

que luego de multiplicar por $\times\vec{\mathbf{v_2}}$ y por $\vec{\mathbf{r_2}}\times$ resulta en:

$$1 = c_1\mathcal{F}_{21} + c_3\mathcal{F}_{23}, \qquad 0 = c_1\mathcal{G}_{21} + c_3\mathcal{G}_{23},$$

de donde podemos obtener c_1 y c_3:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mathcal{G}_{23}}{\mathcal{F}_{21}\mathcal{G}_{23} - \mathcal{G}_{21}\mathcal{F}_{23}}, \\ c_3 &= -\frac{\mathcal{G}_{21}}{\mathcal{F}_{21}\mathcal{G}_{23} - \mathcal{G}_{21}\mathcal{F}_{23}}. \end{aligned}\right] \tag{III-45}$$

Si aplicamos la transformación de Cunningham, explicada para el método de Gauss - Encke - Merton, a las ecuaciones (III-44) los componentes de los vectores de posición son:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_{21}\xi_2' + \mathcal{G}_{21}v\xi_2' &= x_{\oplus 1} + \rho_1, \\ \mathcal{F}_{21}\eta_2' + \mathcal{G}_{21}v\eta_2' &= y_{\oplus 1}, \\ \mathcal{F}_{21}\zeta_2' + \mathcal{G}_{21}v\zeta_2' &= z_{\oplus 1}, \end{aligned}\right] \tag{III-46}$$

$$\left.\begin{aligned}\xi_2' &= x_{\oplus 2} + \rho_2(\mathbf{\hat{u}_2} \bullet \hat{\xi}'),\\ \eta_2' &= y_{\oplus 2} + \rho_2(\mathbf{\hat{u}_2} \bullet \hat{\eta}'),\\ \zeta_2' &= z_{\oplus 2} + \rho_2(\mathbf{\hat{u}_2} \bullet \hat{\zeta}'),\end{aligned}\right] \tag{III-47}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{F}_{23}\xi_2' + \mathcal{G}_{23}v\xi_2' &= x_{\oplus 3} + \rho_3(\mathbf{\hat{u}_3} \bullet \hat{\xi}'),\\ \mathcal{F}_{23}\eta_2' + \mathcal{G}_{23}v\eta_2' &= y_{\oplus 3} + \rho_3(\mathbf{\hat{u}_3} \bullet \hat{\eta}'),\\ \mathcal{F}_{23}\zeta_2' + \mathcal{G}_{23}v\zeta_2' &= z_{\oplus 3}.\end{aligned}\right] \tag{III-48}$$

Donde las componentes de $\mathbf{\hat{r}_2}$ y $\mathbf{\hat{v}_2}$ luego de la transformación son $(\xi_2', \eta_2', \zeta_2')$ y $(v\xi_2', v\eta_2', v\zeta_2')$, respectivamente.

Por otra parte, si combinamos las ecuaciones (III-41) y (III-45), se obtiene:

$$\rho_2 = -\frac{1}{\mathbf{\hat{u}_2} \bullet \hat{\zeta}'}\left(z_{\oplus 2} - \frac{\mathcal{G}_{23}z_{\oplus 1} - \mathcal{G}_{21}z_{\oplus 3}}{\mathcal{F}_{21}\mathcal{G}_{23} - \mathcal{G}_{21}\mathcal{F}_{23}}\right). \tag{III-49}$$

El proceso de cálculo se inicia a partir de un valor aproximado para ρ_2, el cual permite calcular $\vec{\mathbf{r_2}}$ mediante la segunda ecuación (III-44). Conocido $\vec{\mathbf{r_2}}$, se obtienen valores para $\mathcal{F}_{21}$, $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{G}_{21}$, y $\mathcal{G}_{23}$ mediante las series (II-78) truncadas para exponentes superiores al tercero. Luego se calcula la componente $v\zeta_2'$ obteniendo la media de la tercera ecuación (III-46) y la tercera ecuación (III-48):

$$v\zeta_2' = \left(\frac{z_{\oplus 3} - \mathcal{F}_{23}\zeta_2'}{\mathcal{G}_{23}}(t_1 - t_2) + \frac{z_{\oplus 1} - \mathcal{F}_{21}\zeta_2'}{\mathcal{G}_{21}}(t_3 - t_2)\right)\frac{1}{(t_1 - t_2) + (t_3 - t_2)}. \tag{III-50}$$

Las restantes componentes de la velocidad se obtienen resolviendo sucesivamente la segunda ecuación (III-46), la segunda ecuación (III-48), y la primera ecuación (III-48). Como ahora conozco tanto $\vec{\mathbf{r_2}}$ como $\vec{\mathbf{v_2}}$, puedo utilizar las *funciones* $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ (no las aproximaciones por series) para recalcular $\mathcal{F}_{21}$, $\mathcal{F}_{23}$, $\mathcal{G}_{21}$, y $\mathcal{G}_{23}$, obtener nuevas aproximaciones para ρ_2 [utilizando la ecuación (III-49)], y para la componente ζ_2' [mediante la última ecuación (III-47)]. A partir de este punto se recalcula $v\zeta_2'$ y se itera hasta la convergencia.

Tanto en el método de Gauss - Encke - Merton como en el de Moulton - Väisälä - Cunningham es posible que durante el cálculo aparezcan distancias geocéntricas negativas si el valor inicial no es muy bueno o si las tres posiciones consideradas se encuentran sobre un círculo máximo ($\mathbf{\hat{u}_2} \bullet \hat{\zeta}' \to 0$). En el primer caso es posible elegir un valor inicial diferente o simplemente tomar el valor absoluto de la distancia geocéntrica negativa y seguir el proceso de cálculo.

Por último, en cuanto se tenga una estimación de las distancias geocéntricas resulta necesario en ambos métodos corregir por aberración planetaria los tiempos, restando $\Delta t[días] = 0{,}005768\,\rho[UA]$, y desde un principio aplicar una corrección topocéntrica a las observaciones para reducirlas al centro de la Tierra.

7. El método de Väisälä para dos observaciones:

Si se cuenta unicamente con dos observaciones del objeto es imposible determinar las seis constantes que definen la órbita. Si nos vemos obligados a efectuar el cálculo sólo con esta información debemos incluir algunas suposiciones sobre el movimiento del objeto que compensen de algún modo la observación faltante. Como usualmente no es posible confirmar nuestras suposiciones sin observaciones adicionales es muy posible que la órbita calculada de este modo se aleje significativamente de la realidad. De todas maneras, este tipo de cálculo es útil para interpolar o extrapolar posiciones y para detectar datos erróneos.

¿Qué podemos asumir para compensar la falta de una tercera observación?. En principio podemos suponer que la órbita del objeto es *circular*. En este caso, no están definida la excentricidad y el argumento del perihelio por lo que podemos utilizar las dos observaciones para obtener los restantes cuatro elementos (a, i, Ω, y T). El problema fundamental en esta situación es que frecuentemente no es posible satisfacer con dos posiciones una órbita circular y el cálculo nunca converge.

Otra posibilidad es asumir que la órbita es *elíptica* asignando un valor a dos elementos cualquiera en forma arbitraria. Si bien esta órbita asumida no presenta ninguna ventaja para la identificación posterior del objeto respecto de la órbita circular, frecuentemente es más facil calcularla debido a que existen más posibilidades de elección sobre qué elementos se definen *a priori*.

En 1939 Väisälä propone un método donde se asume que el objeto en la segunda observación se encuentra en el PERIHELIO de su órbita. Asumir esta condición es razonable porque en general los objetos débiles se descubren cuando se encuentran próximos al perihelio de su órbita y es más facil detectarlos. La segunda condición arbitraria se obtiene eligiendo la distancia geocéntrica en el momento de la segunda observación.

Si escribimos los vectores de posición heliocéntricos para ambos instantes, según la ecuación (III-7) tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r_1}} &= \vec{\mathbf{r_{\oplus 1}}} + \rho_1 \hat{\mathbf{u_1}}, \\ \vec{\mathbf{r_2}} &= \vec{\mathbf{r_{\oplus 2}}} + \rho_2 \hat{\mathbf{u_2}}. \end{aligned} \tag{III-51}$$

Como se asume ρ_2, el valor de $\vec{\mathbf{r_2}}$ también se conoce. Si ahora expresamos el vector $\vec{\mathbf{r_1}}$ en función de $\vec{\mathbf{r_2}}$ utilizando las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ tenemos que:

$$\vec{\mathbf{r_1}} = \mathcal{F}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}\vec{\mathbf{v_2}}, \tag{III-52}$$

la distancia geocéntrica para la primera observación será:

$$\rho_1 \hat{\mathbf{u_1}} = \vec{\mathbf{r_1}} - \vec{\mathbf{r}_{\oplus_1}} = \mathcal{F}\vec{\mathbf{r_2}} + \mathcal{G}\vec{\mathbf{v_2}} - \vec{\mathbf{r}_{\oplus_1}}, \tag{III-53}$$

donde los valores para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ los podemos obtener de las series dadas en las ecuaciones (II-78), pero como se asume que el objeto está en el perihelio, tenemos que $\mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t = 0$ y las series son EXACTAS en este caso. Si multiplicamos escalarmente la ecuación (III-53) por $\vec{\mathbf{r_2}}$, dado que $\vec{\mathbf{r_2}} \bullet \vec{\mathbf{v_2}} = r_2\,\mathrm{d}r_2/\mathrm{d}t = 0$, tenemos que:

$$\rho_1 = \frac{\mathcal{F}r_2^2 + -\vec{\mathbf{r}_{\oplus_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2}}}{\hat{\mathbf{u_1}} \bullet \vec{\mathbf{r_2}}}.$$

Al conocer ρ_1 podemos obtener un valor para $\vec{\mathbf{r_1}}$ mediante la primera ecuación (III-51), y encontrar $\vec{\mathbf{v_2}}$ mediante la ecuación (III-52). Conocidos $\vec{\mathbf{r_2}}$ y $\vec{\mathbf{v_2}}$ podemos calcular los elementos orbitales.

Como el cálculo es bastante simple, generalmente se realiza para un intervalo de distancias geocéntricas $[\rho_2]_{min} \leq \rho_2 \leq [\rho_2]_{max}$, lo que permite definir un rango de variación para los elementos orbitales y, por lo tanto, un área en el cielo donde la posibilidad de encontrar al objeto en el futuro es alta. Este tipo de cálculo también permite identificar nuevas observaciones de un objeto dado o posiciones discordantes o con demasiado error para ser útiles de un modo rápido.

8. El Método de Herget:

Los métodos de Laplace y Gauss pueden lograr que las tres observaciones utilizadas se satisfagan aceptablemente, pero en general muestran una diferencia notoria al considerar una cuarta posición. Esto se debe a la existencia de errores observacionales que pueden ser minimizados si se trabaja con varias observaciones para encontrar la órbita. Para resolver este problema, Herget propuso un método que logra un compromiso satisfaciendo exactamente dos observaciones y minimizando los residuos de las restantes mediante mínimos cuadrados.

Consideremos un conjunto de n observaciones (λ_i, β_i) para los instantes t_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, los cuales no deben respetar un orden especial. Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r_1}} &= \rho_1\,\hat{\mathbf{u_1}} + \vec{\mathbf{r}_{\oplus_1}}, \\ \vec{\mathbf{r_2}} &= \rho_2\,\hat{\mathbf{u_2}} + \vec{\mathbf{r}_{\oplus_2}}, \\ &\vdots \quad \vdots \\ \vec{\mathbf{r_{n-1}}} &= \rho_{n-1}\,\hat{\mathbf{u_{n-1}}} + \vec{\mathbf{r}_{\oplus_{n-1}}}, \\ \vec{\mathbf{r_n}} &= \rho_n\,\hat{\mathbf{u_n}} + \vec{\mathbf{r}_{\oplus_n}}. \end{aligned} \tag{III-54}$$

Si se pretende ajustar exactamente las observaciones para, digamos, t_1 y t_n el proceso deberá iterar sobre los valores de ρ_1 y ρ_n que, una vez encontrados, permitirán calcular $\vec{\mathbf{r_1}}$ y $\vec{\mathbf{r_n}}$. Como es posible encontrar la velocidad en el instante t_1 utilizando el método de Herrick y Liu, podemos usar las funciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ para obtener los valores $\vec{\mathbf{r_i}} = \vec{\mathbf{r}}(t_i)$ para los restantes instantes. Estos valores calculados pueden presentar inconsistencias al sustituirlos en la ecuación (III-54). Para cuantificar estas inconsistencias vamos a introducir los vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathbf{A_i}} = (-\sin\lambda_i, \cos\lambda_i, 0), \\ \vec{\mathbf{D_i}} = (-\sin\beta_i\,\cos\lambda_i, -\sin\beta_i\,\sin\lambda_i, \cos\beta_i), \end{array}\right] \quad i = 2, 3, \cdots, n-1, \qquad \text{(III-55)}$$

que para cada instante forma un conjunto ortogonal con $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{i}$. Si ahora definimos:

$$\left.\begin{array}{rcccl} P_i & = & P_i(\rho_1, \rho_n) & = & (\vec{\mathbf{r_i}} - \vec{\mathbf{r_{\oplus i}}}) \bullet \vec{\mathbf{A_i}}, \\ Q_i & = & Q_i(\rho_1, \rho_n) & = & (\vec{\mathbf{r_i}} - \vec{\mathbf{r_{\oplus i}}}) \bullet \vec{\mathbf{D_i}}, \end{array}\right] \quad i = 2, 3, \cdots, n-1, \qquad \text{(III-56)}$$

las cuales deberían ser todas cero para observaciones precisas y una órbita exacta. Entonces, el problema se reduce a encontrar valores de ρ_1 y ρ_n para los cuales los residuos sean lo más pequeños posible y, además, se distribuyan de un modo estadísticamente razonable.

Si asumimos que los valores correctos son ρ_1 y ρ_n, y encontramos aproximaciones ρ_1^* y ρ_n^* por alguno de los métodos explicados con anterioridad, las correcciones necesarias para obtener los valores correctos son $\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho_1^*$ y $\Delta\rho_n = \rho_n - \rho_n^*$, por lo que idealmente tendremos:

$$\left.\begin{array}{rcl} P_i(\rho_1^* + \Delta\rho_1, \rho_n^* + \Delta\rho_n) & = & 0, \\ Q_i(\rho_1^* + \Delta\rho_1, \rho_n^* + \Delta\rho_n) & = & 0, \end{array}\right] \quad i = 2, 3, \cdots, n-1. \qquad \text{(III-57)}$$

Los valores para $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$ se obtienen desarrollando P_i y Q_i mediante series de Taylor despreciando terminos cruzados y de segundo grado en adelante:

$$\left.\begin{array}{rcl} P_i(\rho_1^*, \rho_n^*) + \dfrac{\partial P_i}{\partial \rho_1}\,\Delta\rho_1 + \dfrac{\partial P_i}{\partial \rho_n}\,\Delta\rho_n & = & 0, \\ \\ Q_i(\rho_1^*, \rho_n^*) + \dfrac{\partial Q_i}{\partial \rho_1}\,\Delta\rho_1 + \dfrac{\partial Q_i}{\partial \rho_n}\,\Delta\rho_n & = & 0, \end{array}\right] \quad i = 2, 3, \cdots, n-1, \qquad \text{(III-58)}$$

donde las derivadas parciales pueden encontrarse mediante las aproximaciones usuales:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial P_i}{\partial \rho_1} & \simeq & \dfrac{P_i(\rho_1+\Delta,\rho_n)-P_i(\rho_1-\Delta,\rho_n)}{2\Delta}, \\ \\ \frac{\partial P_i}{\partial \rho_n} & \simeq & \dfrac{P_i(\rho_1,\rho_n+\Delta)-P_i(\rho_1,\rho_n-\Delta)}{2\Delta}, \\ \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_1} & \simeq & \dfrac{Q_i(\rho_1+\Delta,\rho_n)-Q_i(\rho_1-\Delta,\rho_n)}{2\Delta}, \\ \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \rho_n} & \simeq & \dfrac{Q_i(\rho_1,\rho_n+\Delta)-Q_i(\rho_1,\rho_n-\Delta)}{2\Delta}, \end{array}\right] \quad i=2,3,\cdots,n-1, \tag{III-59}$$

con un error del orden de Δ^3. Herget sugería $\Delta = 0{,}1$, con valores menores si las distancias geocéntricas son pequeñas, pero efectuando los cálculos en doble precisión es suficiente utilizar $\Delta = 0{,}001$ para la mayoría de los casos.

Las ecuaciones (III-58) para las $n-2$ observaciones pueden escribirse como:

$$\left[\begin{array}{rcl} b_1 + a_{11}\Delta\rho_1 + a_{12}\Delta\rho_n & = & 0, \\ b_2 + a_{21}\Delta\rho_1 + a_{22}\Delta\rho_n & = & 0, \\ \vdots & & \vdots \\ b_k + a_{k1}\Delta\rho_1 + a_{k2}\Delta\rho_n & = & 0, \end{array}\right. \tag{III-60}$$

para $k = 2n-4$. Estas *ecuaciones de condición* no tienen solución debido a que las observaciones no son precisas y la órbita no es exacta. Entonces, cada ecuación (III-60) tendrá un residuo:

$$\phi_i(\Delta\rho_1,\Delta\rho_n) = b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n, \qquad i=1,\cdots,k. \tag{III-61}$$

Para encontrar los mejores $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$ debemos minimizar la suma de los cuadrados de los residuos dados por la ecuación (III-61). Sea:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\rho_1,\Delta\rho_n) &= \sum_{i=1}^{k}\phi_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{k}(b_i + a_{i1}\Delta\rho_1 + a_{i2}\Delta\rho_n)^2. \end{aligned} \tag{III-62}$$

Para minimizar esta expresión debemos igualar a cero las derivadas parciales de Φ respecto de $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$, y obtener las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} \sum_i a_{i1}b_i + \Delta\rho_1\sum_i a_{i1}^2 + \Delta\rho_n\sum_i a_{i1}a_{i2} = 0, \\ \\ \sum_i a_{i2}b_i + \Delta\rho_1\sum_i a_{i1}a_{i2} + \Delta\rho_n\sum_i a_{i2}^2 = 0, \end{aligned} \tag{III-63}$$

de donde pueden calcularse las correcciones $\Delta\rho_1$ y $\Delta\rho_n$ que minimizan el ajuste.

Los valores definitivos se obtienen repitiendo todo el proceso hasta que las diferencias entre un paso y el siguiente sean despreciables. Conocidos ρ_1 y ρ_n, se puede obtener la velocidad para un de esos instantes mediante el método de Herrick y Liu.