Unidad V. Perturbaciones

En las unidades precedentes hemos visto que el problema de los n cuerpos no tiene solución analítica por lo cual no es posible predecir el movimiento de los cuerpos bajo los efectos gravitatorios mutuos en cualquier instante partiendo de sus posiciones y velocidades.

Además, como no es posible definir en la práctica un origen y un sistema de coordenadas fijo en el espacio para estudiar el movimiento del sistema vimos que resulta conveniente referir el movimiento de $n-1$ cuerpos con respecto al restante, en general el más masivo, planteando ecuaciones de movimiento relativo. En este nuevo sistema toda desviación respecto del movimiento kepleriano de un objeto se denomina PERTURBACIONES y la función que caracteriza la perturbación se denomina FUNCIÓN PERTURBADORA.

1. El efecto de pequeños impulsos:

Un caso simple de perturbación se produce cuando un objeto moviéndose en una órbita kepleriana se ve afectado por una fuerza perturbadora por unidad de masa $\vec{\mathbf{F}}$ durante un cierto tiempo dt. En este caso la ecuación de movimiento del objeto es:

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{k^2\mathcal{M}\vec{\mathbf{r}}}{r^3} + \vec{\mathbf{F}},$$

que es igual a la ecuación (IV-15). Este impulso afectará su movimiento alrededor de la masa central y modificará los elementos de su órbita.

Si se descompone $\vec{\mathbf{F}}$ en direcciones radial al objeto, normal al plano orbital y perpendicular a estas dos, podemos escribir:

$$\vec{\mathbf{F}} = R\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} + N\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} + B\hat{\mathbf{u}}_{\theta},$$

donde, $\hat{\mathbf{u}}_{\theta} = \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$. La acción de esta fuerza producirá una variación en el momento angular debido al momento de la fuerza:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{m} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}\mathrm{d}t,\\ &= (rBdt)\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} - (rN\mathrm{d}t)\hat{\mathbf{u}}_{\theta},\end{aligned}$$

pero $\vec{\mathbf{L}}/m = h\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{m} = \mathrm{d}\left(h\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}\right) = h\,\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}h.$$

Como $\mathrm{d}\hat{\mathbf{u_A}}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{u_A}}$, tenemos que $\mathrm{d}h = rB\mathrm{d}t$ y:

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{u_A}} = -\frac{rN\mathrm{d}t}{h}\hat{\mathbf{u}}_\theta. \tag{V-1}$$

Si descomponemos el vector unitario $\hat{\mathbf{u_A}}$ según el sistema eclíptico de coordenadas [ecuación (II-60)], $\hat{\mathbf{u_A}} = (\sin i \sin\Omega)\,\hat{\mathbf{x}} + (-\sin i\cos\Omega)\,\hat{\mathbf{y}} + (\cos i)\,\hat{\mathbf{z}}$, vemos que sus componentes dependen exclusivamente de i y Ω que, según la ecuación (V-1), se ven afectados sólo por la componente N de $\vec{\mathbf{F}}$. Si multiplicamos la ecuación (V-1) por $\hat{\mathbf{z}}\bullet$, tenemos que:

$$\hat{\mathbf{z}}\bullet\mathrm{d}\hat{\mathbf{u_A}} = -\frac{rN\mathrm{d}t}{h}\hat{\mathbf{z}}\bullet\hat{\mathbf{u}}_\theta,$$

o, lo que es lo mismo:

$$-\sin i\mathrm{d}i = -\frac{rN\mathrm{d}t}{h}\hat{\mathbf{z}}\bullet(\hat{\mathbf{u_A}}\times\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}) = -\frac{rN\mathrm{d}t}{h}\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}\bullet(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u_A}}).$$

Dado que $\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u_A}}$ tiene magnitud $\sin i$ y dirección al nodo ascendente, y el vector $\vec{\mathbf{r}}$ forma un ángulo $\bar{f}$ con la dirección al nodo ascendente, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{N}{h}r\cos\bar{f}. \tag{V-2}$$

Si ahora multiplicamos la ecuación (V-1) primero por $\hat{\mathbf{u_A}}\times$ y luego por $\hat{\mathbf{z}}\bullet$, obtenemos:

$$\hat{\mathbf{z}}\bullet(\hat{\mathbf{u_A}}\times\mathrm{d}\hat{\mathbf{u_A}}) = -\frac{rN\mathrm{d}t}{h}\,\hat{\mathbf{z}}\bullet\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}.$$

El valor de $\hat{\mathbf{z}}\bullet\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{r}$ corresponde al seno de la latitud celeste del objeto. El lado izquierdo lo podemos evaluar diferenciando la ecuación (II-60):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{\mathbf{u_A}} = \;& (\cos i\sin\Omega\mathrm{d}i + \sin i\cos\Omega\mathrm{d}\Omega)\,\hat{\mathbf{x}} + \\ & +(-\cos i\cos\Omega\mathrm{d}i + \sin i\sin\Omega\mathrm{d}\Omega)\,\hat{\mathbf{y}} + (-\sin i\mathrm{d}i)\,\hat{\mathbf{z}},\end{aligned}$$

y dado que $\sin\beta = \sin\bar{f}\sin i$, se obtiene que:

$$\sin^2 i\mathrm{d}\Omega = \frac{rN\mathrm{d}t}{h}\sin\bar{f}\sin i,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{N}{h}r\sin\bar{f}\csc i. \tag{V-3}$$

Si ahora consideramos la ecuación de la órbita [ecuación (I-56)], tenemos que:

$$e\cos f = \frac{\mathcal{P}}{r} - 1 = \frac{h^2}{G\mathcal{M}r} - 1,$$

y derivando:

$$e\sin f = \frac{h}{G\mathcal{M}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Como el valor de r no se altera instantaneamente por el impulso, los cambios en el movimiento deben cumplir:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}(e\cos f) =& \ \frac{2h\mathrm{d}h}{G\mathcal{M}r}, \\ \mathrm{d}(e\sin f) =& \ \frac{\mathrm{d}h}{G\mathcal{M}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{h}{G\mathcal{M}}\mathrm{d}\left[\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]. \end{aligned}\right] \tag{V-4}$$

Como $f = \bar{f} - \omega$ y ninguna de las componentes R o B afecta la longitud del nodo, $\bar{f}$ no cambia instantaneamente y $\mathrm{d}f = -\mathrm{d}\omega$. Si aplicamos esta condición y la ecuación (V-1) en (V-4), y consideramos también que $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2 = R$, tenemos que:

$$\mathrm{d}e\cos f + \mathrm{d}\omega\, e\sin f = \frac{2hB}{G\mathcal{M}}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}e\sin f - \mathrm{d}\omega\, e\cos f = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{rB}{G\mathcal{M}}\mathrm{d}t + \frac{hR}{G\mathcal{M}}\mathrm{d}t.$$

Si resolvemos para $\mathrm{d}e$ y $\mathrm{d}\omega$:

$$\mathrm{d}e = \frac{h}{G\mathcal{M}}R\mathrm{d}t\,\sin f + \left(\frac{2h}{G\mathcal{M}}\cos f + \frac{r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{G\mathcal{M}}\sin f\right)B\mathrm{d}t,$$

$$e\,\mathrm{d}\omega = -\frac{h}{G\mathcal{M}}R\mathrm{d}t\,\cos f + \left(\frac{2h}{G\mathcal{M}}\sin f - \frac{r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{G\mathcal{M}}\cos f\right)B\mathrm{d}t.$$

Si en estas ecuaciones reemplazamos h y $r\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ por sus correspondientes expresiones para el movimiento kepleriano podemos simplificar y obtener:

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{na^2}{G\mathcal{M}}\sqrt{1-e^2}\left[R\,\sin f + B\left(\cos f + \cos E\right)\right], \tag{V-5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{na^2}{G\mathcal{M}e}\sqrt{1-e^2}\left[-R\,\cos f + B\left(1+\frac{r}{\mathcal{P}}\right)\sin f\right].$$

En el caso de $\mathrm{d}\omega$ debemos considerar además que se ve afectado por cualquier variación de la longitud del nodo en una cantidad $-\cos i\,\mathrm{d}\Omega$, por lo tanto la expresión final es:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{na^2}{G\mathcal{M}e}\sqrt{1-e^2}\left[-R\,\cos f + B\left(1+\frac{r}{\mathcal{P}}\right)\sin f\right] - \cos i\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}. \tag{V-6}$$

Si utilizamos $\mathrm{d}\tilde{\omega}$ en lugar de $\mathrm{d}\omega$, también debemos considerar la variación de Ω. En este caso, se introduce una cantidad $(1-\cos i)\mathrm{d}\Omega = 2\sin^2(i/2)\mathrm{d}\Omega$, por lo que la expresión final será:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{na^2}{G\mathcal{M}e}\sqrt{1-e^2}\left[-R\,\cos f + B\left(1+\frac{r}{\mathcal{P}}\right)\sin f\right] + 2\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}. \tag{V-7}$$

Para encontrar una expresión para da partimos de la relación:

$$a(1-e^2) = \frac{h^2}{G\mathcal{M}},$$

de donde se obtiene:

$$\mathrm{d}a\,(1-e^2) = 2ae\,\mathrm{d}e + \frac{2h}{G\mathcal{M}}\,\mathrm{d}h.$$

Reemplazando de y dh por sus expresiones y simplificando, tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2na^2}{G\mathcal{M}}\left[R\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\,\sin f + B\frac{a^2}{r}\sqrt{1-e^2}\right]. \qquad \text{(V-8)}$$

En resumen, las variaciones en los elementos orbitales debido a la acción de una fuerza externa se expresan mediante las ecuaciones (V-2), (V-3), (V-5), (V-6), (V-7) y (V-8) que constituyen una forma de las ECUACIONES DE LAGRANGE escritas de una forma que fue propuesta originalmente por Gauss.

Para encontrar la ecuación de la variación del instante del paso por el perihelio, T, se puede diferenciar $r = a(1-e\cos E)$ para encontrar $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ y luego diferenciar $n(t-T) = E - e\sin E$ para encontrar $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$. Otra opción es definir el ángulo $\epsilon = \tilde{\omega} - nT$ y encontrar su variación. Si escribimos la ecuación de Kepler como:

$$nt + \epsilon - \tilde{\omega} = E - e\sin E,$$

y diferenciamos, tenemos:

$$n + t\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} = (1-e\cos E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \sin E\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}.$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior las expresiones para $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$, y $\mathrm{d}e/\mathrm{d}t$, tenemos una expresón para $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t$ en la cual algunos coeficientes en ciertos términos contienen t. Si se intenta utilizar esta ecuación sobre grandes intervalos de tiempo aparecerán valores grandes difíciles de manejar. Para evitar esta dificultad se puede introducir una nueva variable, ϵ_1, definida por:

$$nt + \epsilon = \int n\mathrm{d}t + \epsilon_1.$$

Si diferenciamos, tenemos:

$$n + t\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = n + \frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t}.$$

Entonces, el lado izquierdo de la ecuación se puede escribir como $n + \mathrm{d}\epsilon_1/\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t$, y no aparecen más los términos que pueden resultar difíciles. Finalmente, la expresión para $\mathrm{d}\epsilon_1/\mathrm{d}t$ es:

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{2nar}{G\mathcal{M}}R + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\left(\frac{i}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{(V-9)}$$

Supongamos ahora que la fuerza $\vec{\mathcal{F}}$ proviene de la función perturbadora $\mathcal{R}$ de un objeto masivo. En este caso, podemos considerar que $\vec{\mathcal{F}}$ es función de los elementos orbitales y el tiempo por lo cual podríamos reemplazar las componentes de $\vec{\mathcal{F}}$ por expresiones en derivadas parciales de $\mathcal{R}$.

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{\mathcal{F}}$ es:

$$\delta W = R\delta r + N\, r\delta n + B\, r\delta b,$$

donde δr, $r\delta n$, y $r\delta b$ son pequeños desplazamientos en el punto de aplicación de la fuerza en las direcciones de R, N, y B, respectivamente. Si consideramos ahora que $\mathcal{R}$ es función de los elementos orbitales e interpretamos los cambios en el punto de aplicación de la fuerza como cambios en los elementos (manteniendo el tiempo constante), podemos decir que:

$$\delta W = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a}\delta a + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}\delta e + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial (nt+\epsilon)}\delta \epsilon_1 + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}}\delta \tilde{\omega} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}\delta \Omega + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}\delta i,$$

donde $\partial\mathcal{R}/\partial(nt+\epsilon) = \partial\mathcal{R}/\partial\epsilon$. Como las variaciones de los elementos son independientes y pueden ser igualadas a cero se puede obtener de las dos últimas expresiones valores para $\partial\mathcal{R}/\partial a$, etc., en términos de R, N, y B, y reemplazar en las ecuaciones (V-2), (V-3), (V-5), (V-6), (V-7), (V-8) y (V-9) para obtener:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon},\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{(1-e^2)}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}}\right),\\
\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}(1-\sqrt{1-e^2})\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} +\\
&\quad + \frac{\tan\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i},\\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\csc i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i},\\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i},\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left[\csc i\,\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} + \tan\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{\omega}}\right)\right],
\end{aligned}\right]\qquad \text{(V-10)}$$

que corresponden a otra forma de las ecuaciones de Lagrange.

2. Desarrollo literal de la función perturbadora:

Para poder trabajar con la ecuación de movimiento planteada en la ecuación (IV-15) se requiere alguna expresión para la función perturbadora. Como vimos en la sección anterior la perturbación puede provenir de diversas fuentes, como una colisión o el abultamiento ecuatorial de un planeta, pero aquí solo trataremos el caso donde interactuan dos masas puntuales m y m' con vectores de posición $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}'}$ que cumplen siempre la condición $\vec{\mathbf{r}} < \vec{\mathbf{r}'}$. El objetivo en esta sección es obtener un desarrollo en serie en función de los elementos orbitales a, e, i, $\tilde{\omega}$, Ω y λ para ambas masas.

Si respetamos la notación planteada en la unidad anterior, la función perturbadora para cada una de las masas es:

$$\mathcal{R} = k^2 m' \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}'}}{r'^3} \right), \qquad \mathcal{R}' = k^2 m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}'}}{r^3} \right).$$

En estas expresiones, los primeros términos se denominan TÉRMINOS DIRECTOS porque corresponden al efecto del perturbador directamente sobre la masa perturbada, y los segundos términos se llaman TÉRMINOS INDIRECTOS debido a que representan el efecto del perturbador sobre la masa central. Las funciones perturbadoras las podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{k^2 m'}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{k^2 m'}{a'} \alpha \mathcal{R}_E, \\ \mathcal{R}' &= \frac{k^2 m}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{k^2 m}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I, \end{aligned} \tag{V-11}$$

donde:

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D &= \frac{a'}{|\vec{\mathbf{r}'} - \vec{\mathbf{r}}|} = \frac{a'}{\rho}, \\ \mathcal{R}_E &= -\left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \cos\psi, \\ \mathcal{R}_I &= -\left(\frac{r'}{a'} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos\psi, \end{aligned} \tag{V-12}$$

siendo ψ el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}'}$ (Figura 14). En las ecuaciones (V-11), $\mathcal{R}_D$ corresponde a los términos directos, $\mathcal{R}_E$ corresponde al término indirecto debido a un perturbador externo, y $\mathcal{R}_I$ al término indirecto debido a un perturbador interno.

De la Figura 14 tenemos que:

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi, \qquad \text{(V-13)}$$

donde:

$$\cos\psi = \frac{\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r}'}}{rr'} = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}.$$

Operando con la ecuaciones (II-63) podemos encontrar expresiones para las componentes del vector $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= \cos\Omega\cos(\omega + f) - \sin\Omega\sin(\omega + f)\cos i, \\
\frac{y}{r} &= \sin\Omega\cos(\omega + f) + \cos\Omega\sin(\omega + f)\cos i, \qquad \text{(V-14)} \\
\frac{z}{r} &= \sin(\omega + f)\sin i,
\end{aligned}$$

con expresiones similares para x'/r', y'/r', y z'/r'. Todas estas ecuaciones pueden ser desarrolladas en series de M y M' usando los desarrollos para $\cos f$ y $\sin f$ mencionados en la unidad anterior.

Si definimos $\Psi = \cos\psi - \cos(\Lambda - \Lambda')$, donde $\Lambda = \tilde{\omega} + f$ y $\Lambda' = \tilde{\omega'} + f'$ son las longitudes verdaderas de ambos cuerpos, la serie resultante para Ψ es de segundo orden en $\sin i$ y $\sin i'$ y la expresión para ρ^{-1} se puede desarrollar en una serie de Taylor en Ψ. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} = \frac{\mathcal{R}_D}{a'} &= \left[r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\Lambda - \Lambda') + \Psi)\right]^{-1/2} = \\
&= \frac{1}{\Delta_0} + rr'\Psi\frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(rr'\Psi)^2\frac{1}{\Delta_0^5} + \cdots = \qquad \text{(V-15)} \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(2u)!}{(u!)^2}\left(\frac{1}{2}rr'\Psi\right)^u \frac{1}{\Delta_0^{2u+1}},
\end{aligned}$$

donde $\Delta_0^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\Lambda - \Lambda')$. Si definimos:

$$\rho_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\Lambda - \Lambda'), \qquad \text{(V-16)}$$

podemos desarrollar $1/\Delta_0^{2u+1}$ en una serie de Taylor:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2u+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2u+1}} + (r - a)\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\rho_0^{2u+1}}\right) + (r' - a')\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{\rho_0^{2u+1}}\right) + \cdots. \qquad \text{(V-17)}$$

Si definimos el operador diferencial:

$$D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n},$$

y las variableas auxiliares:

$$\epsilon = \frac{r}{a} - 1, \qquad \epsilon' = \frac{r'}{a'} - 1,$$

vemos que de la serie para r/a tenemos que ϵ es de $\mathcal{O}(e)$ y ϵ' es de $\mathcal{O}(e')$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta_0^{2u+1}} = &\ [1 + \epsilon D_{1,0} + \epsilon' D_{0,1} + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\epsilon^2 D_{2,0} + 2\epsilon\epsilon' D_{1,1} + \epsilon'^2 D_{0,2}\right) + \cdots\Big] \frac{1}{\rho_0^{2u+1}}.\end{aligned} \tag{V-18}$$

Por otra parte, tenemos de la ecuación (V-16):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0^{2u+1}} &= \left[a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\Lambda - \Lambda')\right]^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= a'^{-(2u+1)}\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\Lambda - \Lambda')\right]^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= a'^{-(2u+1)}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{u+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)\cos j(\Lambda - \Lambda'),\end{aligned} \tag{V-19}$$

donde $b_s^{(j)}$ son *coeficientes de Laplace*, los cuales pueden ser expresados como series uniformemente convergentes en α para $\alpha < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) = &\ \frac{s(s+1)\cdots(s+j-1)}{j!}\alpha^j \times \\ &\times \left[1 + \frac{s(s+j)}{1!(j+1)}\alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{2!(j+1)(j+2)}\alpha^4 + \cdots\right].\end{aligned}$$

Dado que los operadores $D_{m,n}$ operan sólo sobre los coeficientes de Laplace, podemos definir funciones $A_{u,j,m,n}$:

$$A_{u,j,m,n} = D_{m,n}\left(a'^{-(2u+1)} b_{u+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)\right) = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n}\left(a'^{-(2u+1)} b_{u+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)\right),$$

por lo cual, ahora podemos escribir:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2u+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{u,j,0,0} + \epsilon A_{u,j,1,0} + \epsilon' A_{u,j,0,1} + \cdots\right]\cos j(\Lambda - \Lambda'). \tag{V-20}$$

Si generalizamos esta expresión tenemos:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2u+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{l}{k}\epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{u,j,k,l-k}\right]\cos j(\Lambda - \Lambda'). \tag{V-21}$$

En esta última expresión hay que tener cuidado en el cálculo de las derivadas parciales respecto de a y a' ya que los coeficientes de Laplace dependen implícitamente de estas variables a través de α. Reemplazando la ecuación (V-21) en la (V-15) obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_D = \ & \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(2u)!}{(u!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^u \frac{a^u a'^{u+1}}{2} \times \\ & \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{u,j,k,l-k} \right] \cos j(\Lambda - \Lambda').\end{aligned} \tag{V-22}$$

En esta expresión para $\mathcal{R}_D$ las inclinaciones i e i' sólo aparecen en Ψ, mientras que las excentricidades aparecen en ϵ y ϵ'. Por otra parte, el orden de la serie viene indicado por la suma de exponentes de las excentricidades o las inclinaciones.

Si utilizamos la ecuación (V-22) para calcular una serie a segundo orden en excentricidades e inclinaciones se obtienen 23 términos de diferente orden. Dado que los términos aparecen en pares y siempre contienen cosenos, es posible reordenarlos cambiando los signos de algunos de ellos y aplicando la transformación $j \to \pm j + k$ para cierto entero k. Aplicando estos procedimientos los argumentos se pueden reducir a una forma arbitraria que sea más conveniente para su uso.

Respetando la forma adoptada por Murray y Dermott para estos desarrollos, definimos $s = \sin(i/2)$ y $s' = \sin(i'/2)$, indicamos con $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}\alpha$, y fijamos que j sea el coeficiente de λ' en cada argumento. Entonces, la parte directa de la función perturbadora a segundo orden en excentricidades e inclinaciones es para un j arbitrario:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_D \; = & \left(\frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8}(e^2+e'^2)[-4j^2+2\alpha D+\alpha^2 D^2]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \right.\\
& +\frac{1}{4}(s^2+s'^2)\left([-\alpha]b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + [-\alpha]b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}\right)\Big) \cos[j\lambda'-j\lambda] + \\
& + \left(\frac{1}{4}ee'[2+6j+4j^2-2\alpha D-\alpha^2 D^2]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}\right) \times \\
& \times \cos[j\lambda'-j\lambda+\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}] + \\
& + \left(ss'[\alpha]b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}\right)\cos[j\lambda'-j\lambda+\Omega'-\Omega] + \\
& + \left(\frac{1}{2}e[-2j-\alpha D]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j)}\right)\cos[j\lambda'+(1-j)\lambda-\tilde{\omega}] + \\
& + \left(\frac{1}{2}e'[-1+2j+\alpha D]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}\right)\cos[j\lambda'+(1-j)\lambda-\tilde{\omega}'] + \\
& + \left(\frac{1}{8}e^2[-5j+4j^2-2\alpha D+4j\alpha D+\alpha^2 D^2]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j)}\right) \times \\
& \times \cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-2\tilde{\omega}] + \\
& + \left(\frac{1}{4}ee'[-2+6j-4j^2+2\alpha D-4j\alpha D-\alpha^2 D^2]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}\right) \times \\
& \times \cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}] + \\
& + \left(\frac{1}{8}e'^2[2-7j+4j^2-2\alpha D+4j\alpha D+\alpha^2 D^2]\, b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)}\right) \times \\
& \times \cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-2\tilde{\omega}'] + \\
& + \left(\frac{1}{2}s^2[\alpha]\, b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}\right)\cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-2\Omega] + \\
& + \left(ss'[-\alpha]\, b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}\right)\cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-\Omega'-\Omega] + \\
& + \left(\frac{1}{2}s'^2[\alpha]\, b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}\right)\cos[j\lambda'+(2-j)\lambda-2\Omega'].
\end{aligned}
\tag{V-23}
$$

Los términos indirectos $\mathcal{R}_E$ y $\mathcal{R}_I$, se obtienen facilmente desarrollando $\cos\psi$ en las ecuaciones (V-12) mediante las ecuaciones (V-14) y las series para $\cos f$ y $\sin f$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_E \; \simeq & \left(-1+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e'^2+s^2+s'^2\right)\cos[\lambda'-\lambda] - \\
& -ee'\cos[2\lambda'-2\lambda-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}] - 2ss'\cos[\lambda'-\lambda-\Omega'+\Omega] - \\
& -\frac{1}{2}e\cos[\lambda'-2\lambda+\tilde{\omega}] + \frac{3}{2}e\cos[\lambda'-\tilde{\omega}] - \\
& -2e'\cos[2\lambda'-\lambda-\tilde{\omega}'] - \frac{3}{8}e^2\cos[\lambda'-3\lambda+2\tilde{\omega}] - \\
& -\frac{1}{8}e^2\cos[\lambda'+\lambda-2\tilde{\omega}] + 3ee'\cos[2\lambda'-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}] - \\
& -\frac{1}{8}e'^2\cos[\lambda'+\lambda-2\tilde{\omega}'] - \frac{27}{8}e'^2\cos[3\lambda'-\lambda-2\tilde{\omega}'] - \\
& -s^2\cos[\lambda'+\lambda-2\Omega] + 2ss'\cos[\lambda'+\lambda-\Omega'-\Omega] - \\
& -s'^2\cos[\lambda'+\lambda-2\Omega'].
\end{aligned}
\tag{V-24}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_I \simeq & \left(-1+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e'^2+s^2+s'^2\right)\cos[\lambda'-\lambda]- \\
& -ee'\cos[2\lambda'-2\lambda-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]-2ss'\cos[\lambda'-\lambda-\Omega'+\Omega]- \\
& -2e\cos[\lambda'-2\lambda+\tilde{\omega}]+\frac{3}{2}e'\cos[\lambda-\tilde{\omega}']- \\
& -\frac{1}{2}e'\cos[2\lambda'-\lambda-\tilde{\omega}']-\frac{27}{8}e^2\cos[\lambda'-3\lambda+2\tilde{\omega}]- \\
& -\frac{1}{8}e^2\cos[\lambda'+\lambda-2\tilde{\omega}]+3ee'\cos[2\lambda'-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}]- \\
& -\frac{1}{8}e'^2\cos[\lambda'+\lambda-2\tilde{\omega}']-\frac{3}{8}e'^2\cos[3\lambda'-\lambda-2\tilde{\omega}']- \\
& -s^2\cos[\lambda'+\lambda-2\Omega]+2ss'\cos[\lambda'+\lambda-\Omega'-\Omega]- \\
& -s'^2\cos[\lambda'+\lambda-2\Omega'].
\end{aligned}
\qquad \text{(V-25)}
$$

Es de notar que en los desarrollos para $\mathcal{R}_E$ y $\mathcal{R}_I$ no intervienen coeficientes de Laplace.

3. Algunas relaciones entre coeficientes de Laplace:

Algunas relaciones entre coeficientes de Laplace que pueden resultar útiles a la hora de operar con la función perturbadora se pueden encontrar en el libro de Brouwer and Clemence (1961). Algunas de estas relaciones son:

$$
\begin{aligned}
b_s^{(-j)} = & \; b_s^{(j)}, \\
D\, b_s^{(j)} = & \; s\left(b_{s+1}^{(j-1)}-2\alpha b_{s+1}^{(j)}+b_{s+1}^{(j+1)}\right), \\
D^n\, b_s^{(j)} = & \; s\left(D^{n-1}\, b_{s+1}^{(j-1)}-2\alpha D^{n-1}\, b_{s+1}^{(j)}+\right. \\
& \left. +D^{n-1}\, b_{s+1}^{(j+1)}-2(n-1)D^{n-2}b_{s+1}^{(j)}\right), \\
\alpha^n\left(D^n\, b_s^{(j)}-D^n\, b_s^{(j-2)}\right) = & \; -(j+n-1)\alpha^{n-1}D^{n-1}\, b_s^{(j)}- \\
& -(j-n-1)\alpha^{n-1}D^{n-1}\, b_s^{(j-2)}+ \\
& +2(j-1)\left[\alpha^n D^{n-1}\, b_s^{(j-1)}+(n-1)\alpha^{n-1}D^{n-2}\, b_s^{(j-1)}\right],
\end{aligned}
$$

donde $n \geq 2$ en las dos últimas relaciones y $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}\alpha$ es un operador diferencial.

4. Dessarrollo de la función perturbadora en polinomios de Legendre:

La desventaja principal de cualquier desarrollo literal de la función perturbadora es que para encontrar los términos asociados con un argumento específico es necesario obtener el desarrollo completo hasta el orden de ese argumento. Una posibilidad para evitar este inconveniente es intentar un desarrollo en polinomios de Legendre.

Si partimos de la ecuación (V-13), como $\vec{\mathbf{r}} < \vec{\mathbf{r'}}$ tenemos que:

$$\frac{1}{\rho} = \Big[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi\Big]^{-1/2} = \frac{1}{r'}\left[1 - 2\frac{r}{r'}\cos\psi + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Si desarrollamos esta expresión y ordenamos los términos en potencias de r/r' tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \frac{1}{r'}\left[1 + \frac{r}{r'}\cos\psi + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\frac{1}{2}\Big(3\cos^2\psi - 1\Big) + \right.\\ &\left. + \left(\frac{r}{r'}\right)^3\frac{1}{2}\Big(5\cos^3\psi - 3\cos\psi\Big) + \cdots\right].\end{aligned}$$

Los coeficientes que aparecen en los términos de esta serie corresponden a *polinomios de Legendre*, los cuales pueden ser generados utilizando la fórmula de Rodrigues:

$$\mathcal{P}_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(\mu^2-1)^n}{\mathrm{d}\mu^n}, \tag{V-26}$$

siendo los cuatro primeros:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &= 1,\\ \mathcal{P}_1 &= \mu,\\ \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1),\\ \mathcal{P}_3 &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu).\end{aligned}$$

Entonces, haciendo $\mu = \cos\psi$ en la ecuación (V-26) podemos escribir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos\psi). \tag{V-27}$$

Como $\vec{\mathbf{r}} \bullet \vec{\mathbf{r'}} = rr'\cos\psi = rr'\mathcal{P}_1(\cos\psi)$, la función perturbadora debida a un perturbador externo es:

$$\mathcal{R} = \frac{Gm'}{r'}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos\psi), \tag{V-28}$$

donde se ha omitido $\mathcal{P}_0(\cos\psi) = 1$ debido a que no depende de r y no afecta al valor del gradiente de $\mathcal{R}$. En el caso de un perturbador interno, la función perturbadora es:

$$\mathcal{R}' = \frac{Gm}{r}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos\psi) + Gm\,\frac{r}{r'^2}\cos\psi - Gm\,\frac{r'}{r^2}\cos\psi + \frac{Gm}{r'}, \tag{V-29}$$

que es similar a la expresión para $\mathcal{R}$, salvo por los tres términos extra.

Si utilizamos una vez más los desarrollos en serie para r/a, etc., podemos expresar las ecuaciones (V-28) y (V-29) en función de los elementos orbitales a, e, i, $\tilde{\omega}$, Ω y λ para ambas masas. En general, la expresión para la función perturbadora tendrá la forma:

$$\mathcal{R} = Gm'\sum \mathcal{S}(a, a', e, e', i, i')\cos\varphi, \tag{V-30}$$

donde φ corresponde a una combinación *permitida* de λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, Ω y Ω'. La ventaja de este tipo de desarrollo es que si conocemos la forma explícita de la función $\mathcal{S}$ y la combinación permitida de ángulos en φ es posible identificar los términos cuya contribución a la ecuación de movimiento es dominante o despreciable, indistintamente.

Una ventaja de este tipo de desarrollo es la posibilidad de obtener fórmulas explícitas para series *finitas* asociadas a un cierto argumento desarrollado hasta un cierto orden. Si el argumento tiene la forma:

$$\varphi = j_1\,\lambda' + j_2\,\lambda + j_3\,\tilde{\omega}' + j_4\,\tilde{\omega} + j_5\,\Omega' + j_6\,\Omega, \tag{V-31}$$

y fijamos N_{max} como el máximo orden del desarrollo, la expresión para $\mathcal{R}_D$ asociada con φ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_D \;&= \sum_{u=0}^{u_{max}} \frac{(2u)!}{u!}\frac{(-1)^u}{2^{2u+1}}\alpha^u \sum_{s=s_{min}}^{u}\sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{(2s-4n+1)(s-n)!}{2^{2n}n!(2s-2n+1)!}\times \\
&\times \sum_{m=0}^{s-2n} \kappa_m \frac{(s-2n-m)!}{(s-2n+m)!}(-1)^{s-2n-m}F_{s-2n,m,p}(i)F_{s-2n,m,p'}(i')\times \\
&\times \sum_{l=0}^{u-s} \frac{(-1)^s 2^{2s}}{(u-s-l)!l!}\sum_{v=0}^{v_{max}}\frac{(-1)^v}{v!}\sum_{k=0}^{v}\binom{v}{k}(-1)^k\alpha^v\frac{\mathrm{d}^v}{\mathrm{d}\alpha^v}b_{u+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)\times \\
&\times \mathcal{X}_{-j_2}^{u+k,\,-j_2-j_4}(e)\mathcal{X}_{j_1}^{-(u+k+1),\,j_1+j_3}(e')\times\cos\varphi,
\end{aligned} \tag{V-32}$$

donde $s = \sin(i/2)$ y $s' = \sin(i'/2)$, $\kappa_0 = 1$ y $\kappa_m = 2$ para $m \neq 0$, v_{max}, s_{min}, u_{max}, n_{max}, p y p' se fijan como combinación de otros parámetros, y:

$$\begin{aligned}
F_{lmp}(i) \;&= \frac{j^{l-m}(l+m)!}{2^l p!(l-p)!}\times \\
&\times \sum_k (-1)^k\binom{2l-2p}{k}\binom{2p}{l-m-k}c^{3l-2p-2k}s^{m-l+2p+2k},
\end{aligned} \tag{V-33}$$

se denominan *funciones de inclinación*, donde $j = \sqrt{-1}$, k se suma en el rango $\text{máx}(0, l - m - 2p) \leq k \leq \text{mín}(l - m, 2l - 2p)$, $s = \sin(i/2)$, y $c = \cos(i/2)$. Por otra parte, las cantidades $\mathcal{X}_c^{a,b}(e)$ se denominan *coeficientes de Hansen* que se definen como:

$$\mathcal{X}_c^{a,b}(e) = e^{|c-b|} \sum_{\sigma=0}^{\infty} X_{\sigma+\alpha,\sigma+\beta}^{a,b}\, e^{2\sigma}, \tag{V-34}$$

siendo en este contexto $\alpha = \text{máx}(0, c-b)$, $\beta = \text{máx}(0, b-c)$, y $X_{c,d}^{a,b}$ son *operadores de Newcomb* que se calculan recursivamente mediante:

$$X_{0,0}^{a,b} = 1, \qquad X_{1,0}^{a,b} = b - \tfrac{a}{2},$$

$$\textit{para } d = 0, \qquad 4c\, X_{c,0}^{a,b} = 2(2b - a) X_{c-1,0}^{a,b+1} + (b - a) X_{c-2,0}^{a,b+2},$$

$$\begin{aligned} \textit{y para } d \neq 0, \qquad 4d\, X_{c,d}^{a,b} &= -2(2b + a) X_{c,d-1}^{a,b-1} - (b + a) X_{c,d-2}^{a,b-2} - \\ &\quad -(c - 5d + 4 + 4b + a) X_{c-1,d-1}^{a,b} + \\ &\quad +2(c - d + b) \sum_{k \geq 2} (-1)^k \binom{3/2}{k} X_{c-k,d-k}^{a,b}. \end{aligned}$$

Para los términos indirectos de la función perturbadora, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_E &= -\kappa_m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} F_{1,m,p}(i) F_{1,m,p'}(i') \mathcal{X}_{-j_2}^{1,-j_2-j_4}(e) \mathcal{X}_{j_1}^{-2,j_1+j_3}(e') \times \\ &\quad \times \cos[j_1\, \lambda' + j_2\, \lambda + j_3\, \tilde{\omega}' + j_4\, \tilde{\omega} + j_5\, \Omega' + j_6\, \Omega], \end{aligned} \tag{V-35}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_I &= -\kappa_m \frac{(1-m)!}{(1+m)!} F_{1,m,p}(i) F_{1,m,p'}(i') \mathcal{X}_{-j_2}^{-2,-j_2-j_4}(e) \mathcal{X}_{j_1}^{1,j_1+j_3}(e') \times \\ &\quad \times \cos[j_1\, \lambda' + j_2\, \lambda + j_3\, \tilde{\omega}' + j_4\, \tilde{\omega} + j_5\, \Omega' + j_6\, \Omega], \end{aligned} \tag{V-36}$$

donde p, p', y m son enteros que toman valores 0 o 1.

Otra ventaja de este tipo de desarrollo en polinomios de Legendre es que resulta sencillo ver la forma de los terminos de orden más bajo. En la expresión $\mathcal{R} = Gm' \sum \mathcal{S} \cos\varphi$, $\mathcal{S}$ es una función de los semiejes mayores, excentricidades e inclinaciones de m y m' y φ es un argumento con una forma general:

$$\begin{aligned} \varphi &= (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\tilde{\omega}' + q\tilde{\omega} + \\ &\quad +(m - l + 2p')\Omega' - (m - l + 2p)\Omega, \end{aligned} \tag{V-37}$$

donde, en este caso, l, m, p, p', q y q' son enteros. Es importante comprender que no todos los argumentos son válidos. Si escribimos la ecuación (V-37) en el formato dado por la ecuación

(V-31), se debe cumplir con la RELACIÓN DE D'ALEMBERT:

$$\sum_{i=1}^{6} j_i = 0,$$

siempre que se usen ángulos referidos a una *dirección fija*. En este caso, λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, Ω y Ω' forman un conjunto apropiado ya que están todos referidos a la misma dirección en el espacio.

Si consideramos ahora la forma de la función $\mathcal{S}$ para cada término, función que fija la "intensidad" de un término, se observa que es posible calcular los términos de menor orden en excentricidad e inclinación a partir de las propiedades de $\mathcal{X}_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e)$ y $F_{lmp}(i)$. Usando las ecuaciones (V-33) a (V-34), se obtiene que:

$$\mathcal{X}_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) = \mathcal{O}(e^{|q|}), \qquad \mathcal{X}_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') = \mathcal{O}(e'^{|q'|}),$$

y:

$$F_{lmp}(i) = \mathcal{O}(s^{|m-l+2p|}), \qquad F_{lmp'}(i') = \mathcal{O}(s'^{|m-l+2p'|}),$$

donde $s = \sin(i/2)$ y $s' = \sin(i'/2)$. Entonces:

$$\mathcal{S} \approx \frac{f(\alpha)}{a'} e^{|q|} e'^{|q'|} s^{|m-l+2p|} s'^{|m-l+2p'|} = \frac{f(\alpha)}{a'} e^{|j_4|} e'^{|j_3|} s^{|j_6|} s'^{|j_5|}, \tag{V-38}$$

donde $f(\alpha)$ puede expresarse en función de coeficientes de Laplace. Entonces, el exponente más bajo de $\sin(i/2)$, por ejemplo, en un cierto término debe ser igual o mayor al valor absoluto del coeficiente de Ω.

5. Términos seculares y resonantes:

Para poder comprender el significado físico de cualquier desarrollo de la función perturbadora se necesita decidir cuáles de las infinitas combinaciones permitidas de ángulos son importantes para un problema dado y cuáles no lo son. Una forma posible es clasificar los argumentos considerando las frecuencias asociadas con los cosenos que aparecen en cada término del desarrollo.

Cada término posee un argumento que contiene una combinación lineal de los ángulos λ, λ', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, Ω y Ω'. También sabemos que si no existiera perturbación las longitudes medias (λ y λ') aumentarían constantemente en forma lineal con el tiempo a tasas n y n', respectivamente, pero los restantes ángulos permanecerían constantes. Cuando tenemos una perturbación las longitudes medias son cantidades que variarán rápidamente, mientras que los restantes ángulos sufren variaciones mucho más lentas. Entonces, los términos del desarrollo que no contienen longitudes medias son términos que variarán lentamente y que llamaremos TÉRMINOS SECULARES o de largo período.

La anterior definición no implica que los términos restantes son todos de corto período. Si consideramos el argumento general $\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\tilde{\omega}' + j_4\tilde{\omega} + j_5\Omega' + j_6\Omega$, y tenemos que $\lambda' \approx n't + \epsilon'$ y $\lambda \approx nt + \epsilon$, podemos decir que $j_1\lambda' + j_2\lambda \approx (j_1n' + j_2n)t + cte$. Entonces, si los semiejes mayores de las órbitas a' y a son tales que se cumple:

$$j_1n' + j_2n \approx 0, \tag{V-39}$$

entonces ese argumento también tiene un período más largo que los períodos orbitales de los objetos. La ecuación (V-39) se satisface cuando existe una *conmensurabilidad* entre los movimientos diarios medios o los períodos orbitales de ambos objetos. Estos términos del desarrollo de la función perturbadora se denominan TÉRMINOS RESONANTES. Si consideramos los semiejes mayores de las órbitas, la condición equivalente a la expresada en la ecuación (V-39) es:

$$a \approx a' \left(\frac{|j_2|}{|j_1|}\right)^{2/3}. \tag{V-40}$$

Como los términos resonantes dependen de los semiejes mayores sus efectos se manifiestan en forma *localizada*. En contraposición, un término secular se manifiesta *globalmente* dado que una combinación particular de ángulos puede variar lentamente para un cierto semieje mayor, pero para misma combinación puede variar muy rápidamente para otro semieje.

Cualquier término del desarrollo cuyo argumento no es secular o resonante se considera como un TÉRMINO DE CORTO PERÍODO. En principio, estos términos no producirán ninguna contribución al movimiento para lapsos largos dado que sus efectos se promediarán a cero. Este PRINCIPIO DE PROMEDIADO nos permitirá despreciar en cualquier análisis la contribución de los términos de corto período y enfocar la atención en aquellos términos cuya contribución es importante para el movimiento. Esto nos permite simplificar el problema al aceptar que la dinámica está dominada sólo por los términos seculares y resonantes apropiados, y nos permite pasar de una serie de infinitos términos para la función perturbadora $\mathcal{R}$ a una serie con un número de términos finitos que se denomina FUNCIÓN PERTURBADORA PROMEDIADA $< \mathcal{R} >$.

6. Uso de la función perturbadora:

Para ejemplificar como se utiliza la función perturbadora para estudiar diferentes problemas de movimento perturbado en un sistema dinámico estudiaremos un caso simple de movimiento bajo los efectos de términos seculares y resonantes.

Para ello, asumiremos un problema restringido elíptico de los tres cuerpos donde la masa m es infinitesimal (hace las veces de partícula sin masa), y la órbita del perturbador de masa m' es una elipse con inclinación $i = 0°$.

Para analizar cómo varían los elementos orbitales debido a la perturbación se parte de las ecuaciones (V-10), reducidas al menor orden posible ($e^2 \approx 0$) para simplificar al máximo el problema:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{na}\frac{\partial < \mathcal{R} >}{\partial \lambda}, \\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{na^2 e}\frac{\partial < \mathcal{R} >}{\partial \tilde{\omega}}, \\
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2 \sin i}\frac{\partial < \mathcal{R} >}{\partial i}, \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{na^2 e}\frac{\partial < \mathcal{R} >}{\partial e},
\end{aligned}\right] \tag{V-41}$$

donde $< \mathcal{R} >$ es la función perturbadora promediada para un perturbador externo.

Si nos interesa analizar los efectos de los términos seculares, debemos despreciar todos aquellos términos de la función perturbadora que posean alguna longitud media. Si estudiamos la parte directa de la función perturbadora desarrollada a segundo orden[ecuación (V-23)] se ve que para obtener términos seculares debemos considerar sólo $j = 0$ en los argumentos de los cosenos que contengan λ' y λ. Esto nos da:

$$< \mathcal{R}_D > = C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2 s^2 + C_3 e e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}), \tag{V-42}$$

donde:

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2} b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha), \\
C_1 &= \frac{1}{8}\left[2\alpha D + \alpha^2 D^2\right] b^{(0)}_{\frac{1}{2}}(\alpha), \\
C_2 &= -\frac{1}{2}\alpha\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\alpha), \\
C_3 &= \frac{1}{4}\left[2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2\right] b^{(1)}_{\frac{1}{2}}(\alpha).
\end{aligned}\right]$$

Como estamos asumiendo que $s' = 0$, en $< \mathcal{R}_D >$ no hay términos que contengan ss' o s'^2. Por otra parte, si analizamos $\mathcal{R}_E$ [ecuación (V-24)], vemos que no hay terminos que no contengan al menos una longitud, por lo cual podemos concluir que la parte indirecta de la función perturbadora para un perturbador externo no contribuye con términos seculares. Si reemplazamos la ecuación (V-42) en la ecuación (V-11), y esta en la ecuación (V-41) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{sec} &= 0,\\ \left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{sec} &= n\alpha\frac{m'}{m_0}C_3e'\sin(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'),\\ \left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{sec} &= n\alpha\frac{m'}{m_0}\frac{C_2}{2},\\ \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{sec} &= n\alpha\frac{m'}{m_0}\left[2C_1+C_3\frac{e'}{e}\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')\right],\end{aligned}\right] \tag{V-43}$$

donde se hizo el reemplazo $k^2m' \approx n^2a^3(m'/m_0)$, y m_0 es la masa central. Si asumimos que $e \gg e'$, las soluciones aproximadas a las ecuaciones (V-43) son:

$$\left.\begin{aligned}a =&\ a_0,\\ e =&\ e_0 - \frac{n\alpha}{\mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t}\frac{m'}{m_0}C_3e'\cos(\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}),\\ \Omega =&\ \Omega_0 + n\alpha\frac{m'}{m_0}\frac{C_2}{2}t,\\ \tilde{\omega} =&\ \tilde{\omega}_0 + n\alpha\frac{m'}{m_0}2C_1\,t,\end{aligned}\right] \tag{V-44}$$

donde el subíndice 0 representa los valores en el instante $t = 0$, y hemos tomado para simplificar $\tilde{\omega}' = 0$. Estos resultados indican que no habrá un cambio de semieje debido a efectos seculares, que tanto Ω como $\tilde{\omega}$ se incrementarán o disminuirán linealmente con el tiempo. El movimiento directo del perihelio o del nodo se denomina PRECESIÓN, mientras que REGRESIÓN indica un movimiento retrógrado. Tanto la precesión como la regresión del perihelio y del nodo es una consecuencia natural de los términos seculares de la función perturbadora. Por otra parte, la excentricidad variará periódicamente con una amplitud $|(n\alpha)/(\mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t)(m'/m_0)\,C_3e'|$.

Supongamos ahora que se desea estudiar el movimiento de un asteroide con $a = 3{,}27\,UA$ y consideramos como perturbador a Júpiter. Como $a' = 5{,}2\,UA$ la relación entre los períodos de ambos cuerpos es $\alpha = (3{,}27/5{,}2)^{3/2} \approx 0{,}499$ y tenemos que se cumple la relación $2n' \approx n$ y es de esperar que los términos resonantes sean importantes. Por lo tanto, en la proximidad de la resonancia 2 : 1, además de los términos seculares debemos considerar los términos resonantes del desarrollo de la función perturbadora que contienen $2\lambda' - \lambda$.

Si analizamos la expresión del desarrollo de segundo orden para $\mathcal{R}_D$ [ecuación (V-23)] vemos que hay dos términos que tienen cosenos cuyo argumento contienen $2\lambda' - \lambda$ para un valor específico de j. Entonces, $< \mathcal{R}_D >$ es:

$$\begin{aligned} < \mathcal{R}_D > \; &= C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2 s^2 + C_3 e e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \\ &+ C_4 e \cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}) + C_5 e' \cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}'), \end{aligned} \tag{V-45}$$

donde los valores para C_0, C_1, C_2, y C_3 son los mismos del caso secular y:

$$\left.\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{2}\left[-4 - \alpha D\right] b_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\alpha), \\ C_5 &= \frac{1}{2}\left[3 + \alpha D\right] b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha). \end{aligned}\right]$$

Además, la parte indirecta de la función perturbadora $\mathcal{R}_E$ [ecuación (V-24)] contribuye con un término $-2\alpha e' \cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}')$. Si repetimos el proceso de reemplazar la ecuación (V-45) en la ecuación (V-11), y el resultado en la ecuación (V-41) obtenemos que la contribución debida exclusivamente a los términos resonantes es:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)_{res} &= 2n\alpha a \frac{m'}{m_0} C_4 e \sin(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}) + \\ &\quad + 2n\alpha a \frac{m'}{m_0} (C_5 - 2\alpha) e' \sin(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}'), \\ \left(\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)_{res} &= n\alpha \frac{m'}{m_0} C_4 \sin(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}), \\ \left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)_{res} &= 0, \\ \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{res} &= n\alpha \frac{m'}{m_0} \frac{C_4}{e} \cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}). \end{aligned}\right] \tag{V-46}$$

Si ahora consideramos las soluciones aproximadas para las ecuaciones (V-46) asumiendo que las cantidades que varían con el tiempo se encuentran sólo en los argumentos de los cosenos y que $\tilde{\omega}$ aumenta linealmente con el tiempo a una tasa determinada por los efectos seculares, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}
a = \quad & a_0 - \frac{2n\alpha a \frac{m'}{m_0} C_4 e}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t} \left[\cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}) - \cos(\lambda_0 + \tilde{\omega}_0)\right] - \\
& - \frac{2n\alpha a \frac{m'}{m_0} (C_5 - 2\alpha) e'}{2n' - n} \left[\cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}') - \cos\lambda_0\right], \\
e = \quad & e_0 + \frac{n\alpha \frac{m'}{m_0} C_4}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t} \left[\cos(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}) - \cos(\lambda_0 + \tilde{\omega}_0)\right], \\
\Omega = \quad & \Omega_0, \\
\tilde{\omega} = \quad & \tilde{\omega}_0 + \frac{n\alpha \frac{m'}{m_0} \frac{C_4}{e}}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t} \left[\sin(2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}) + \sin(\lambda_0 + \tilde{\omega}_0)\right].
\end{aligned}\right] \tag{V-47}$$

Estas ecuaciones sugieren que a, e, y $\tilde{\omega}$ experimentan variaciones periódicas con amplitudes máximas:

$$(\Delta a)_{res} = 2n\alpha a \frac{m'}{m_0} \left[\left|\frac{C_4 e}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t}\right| + \left|\frac{(C_5 - 2\alpha)e'}{2n' - n}\right|\right],$$

$$(\Delta e)_{res} = \left|\frac{n\alpha \frac{m'}{m_0} C_4}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t}\right|,$$

$$(\Delta\tilde{\omega})_{res} = \left|\frac{n\alpha \frac{m'}{m_0} \frac{C_4}{e}}{2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t}\right|.$$

Es importante notar que todas las amplitudes contienen un divisor de la forma $2n' - n - \mathrm{d}\tilde{\omega}/\mathrm{d}t$, que corresponde a la derivada del argumento resonante $2\lambda' - \lambda - \tilde{\omega}$. Esto implica que la variación en los elementos será cada vez mayor a medida que el objeto se acerque a la resonancia exacta y $2n' = n$, pero en este caso el planteo simple que se desarrolló en esta sección falla debido a que se realizaron muchas aproximaciones.

En el análisis precedente se ve que los términos resonantes que dominan el movimiento de un objeto son aquellos en los cuales el argumento del coseno contiene $j_1 n' + j_2 n$, donde j_1 y j_2 son enteros, que resulta muy próximo a cero. Por ejemplo, en el caso resonante anterior los términos dominantes son aquellos con $j_1 = \pm 2$ y $j_2 \mp 1$ que resulta en $2n' - n \approx 0$. Un resultado similar se puede obtener considerando los términos con $j_1 = \pm 4, \pm 6, \pm 8, \cdots$ y $j_2 = \mp 2, \mp 3, \mp 4, \cdots$ dado que estos valores también resultan en una relación $j_1 n' + j_2 n \approx 0$. Como siempre es posible aproximar el cociente entre dos números reales mediante un número racional, parecería ser que hay infinitas resonancias que pueden contribuir con términos de gran amplitud para cualquier semieje mayor que se elija.

Es posible resolver este dilema considerando la expresión para la función $\mathcal{S}$ dada por la ecuación (V-38). Si por simplicidad consideramos un problema de tres cuerpos plano y circular, el argumento resonante es:

$$\varphi = j_1\,\lambda' + j_2\,\lambda + j_4\,\tilde{\omega}.$$

Si escribimos $j_1 = j + k$, $j_2 = -j$, y $j_4 = -k$ para cumplir la relación de D'Alembert, donde j y k son enteros, y asumimos que estamos cerca de una resonancia de modo que $j_1 n' + j_2 n = (j+k)n' - jn \approx 0$, los argumentos que contengan expresiones de la forma $\varphi = (j+k)n' - jn - k\tilde{\omega}$ variarán lentamente y producirán perturbaciones de gran amplitud y largo período. Por ejemplo, para la resonancia $2:1$ tenemos $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ y $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Si bien existe un número infinito de posibles resonancias para cada par $j-k$ la mayoría son *débiles* debido a que $\mathcal{S} \propto e^{|k|}$ [ecuación (V-38)] y $e < 1$, por lo cual la intensidad de esos términos decrece a medida que k crece. Por ejemplo, la resonancia $21:10$ es próxima a la resonancia $2:1$, pero en este caso $\mathcal{S} \propto e^{11}$ y la resonancia es débil.

El valor de k se denomina ORDEN del término resonante y corresponde al valor $k = |j_1 + j_2|$ del argumento del correspondiente coseno. Como resultado, si bien existen términos resonantes de alto orden todos ellos pueden despreciarse del mismo modo que se hace con los términos de corto período dado que corresponden a resonancias débiles.