Procesamiento Avanzado de Imágenes Astronómicas

Restauración y reconstrucción de imágenes I

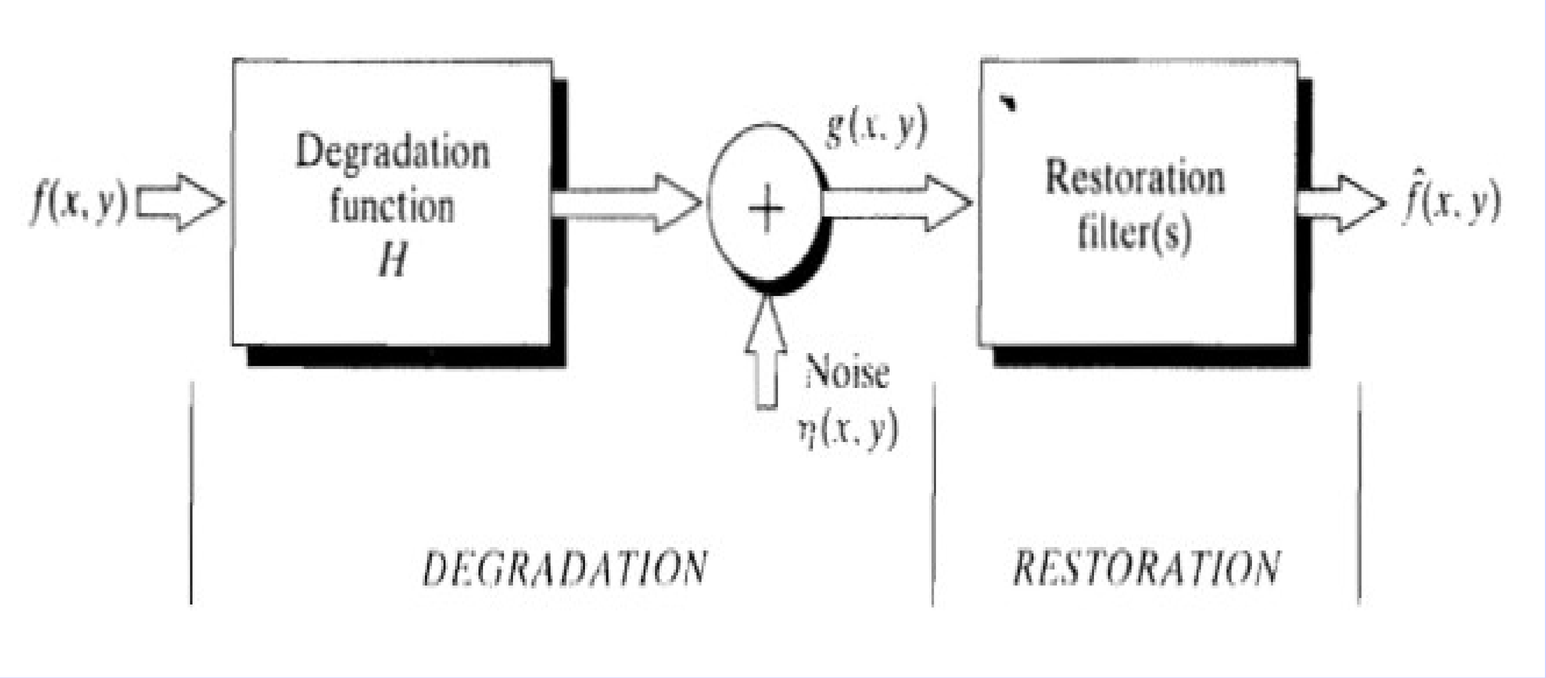
Fundamentos

- las técnicas de restauración tienen por objeto mejorar las imágenes en un cierto aspecto.
- la restauración intenta recuperar una imagen utilizando conocimientos *a priori* del proceso de degradación sufrido.
- las técnicas utilizadas intentan modelar la degradación sufrida y aplicar el proceso inverso.
- las técnicas y procesos utilizados deben producir una mejora objetiva de la imagen.

Fundamentos

- las técnicas de restauración puden corresponder al dominio espacial o de frecuencia.
- las técnicas espaciales se utilizan generalmente cuando la degradación es aditiva.
- las técnicas en frecuencia se utilizan generalmente cuando la degradación es multiplicativa.
- el modelo del proceso de degradación y restauración que estudiaremos es estrictamente lineal.

Modelo de degradación - restauración



Modelo de degradación - restauración

• en el dominio espacial el proceso de degradación es una convolución:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

• mientras que en el dominio de frecuencia es una multiplicación:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

Modelo del ruido

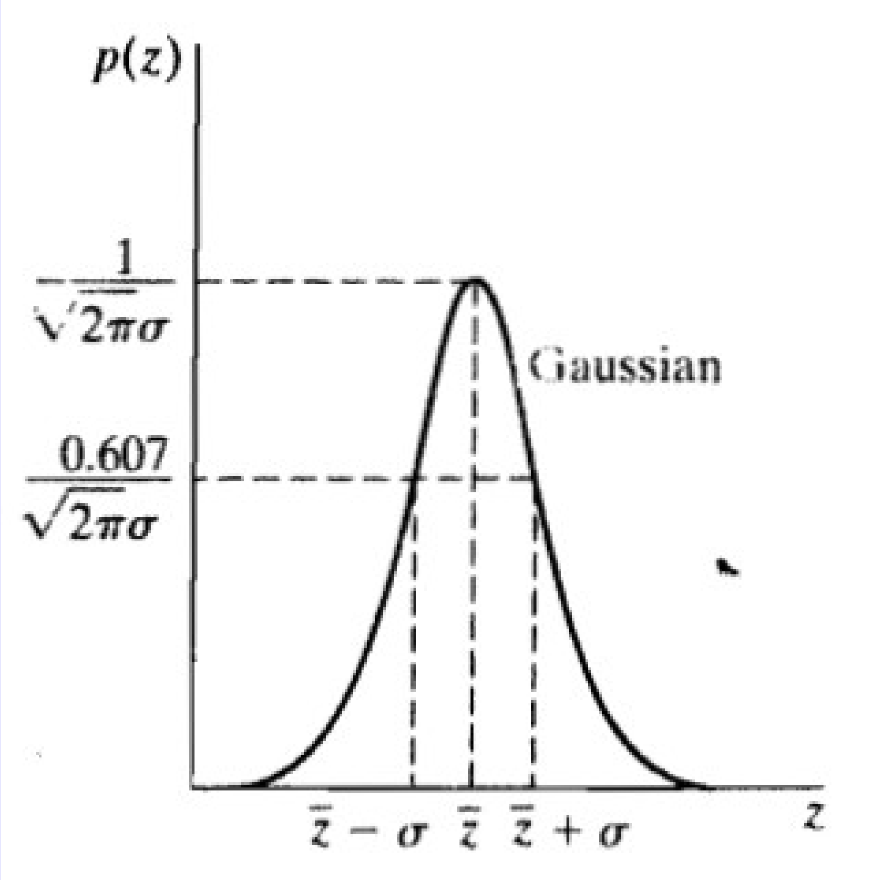
- asumamos por ahora que h(x,y) es un operador de identidad.
- se denomina ruido blanco al ruido cuya transformada de Fourier es una constante para cualquier frecuencia.
- asumimos que el ruido no depende de las coordenadas sobre la imagen y que no está correlacionado con la imagen.
- la excepción es el ruido espacialmente periódico (interferencia).

Modelo del ruido

- para describir el ruido espacial debemos considerar el comportamiento estadístico de los valores de intensidad en el modelo del ruido.
- los valores del ruido pueden considerarse como variables al azar caracterizadas por una función de probabilidad de densidad (PDF).
- las PDF más utilizadas son la gaussiana, Rayleigh, gama (Erlang), exponencial, uniforme e impulsiva.
- para estimar las propiedades del ruido se debe analizar regiones con valor aproximadamente constante o comparar dos imágenes.

Ruido gaussiano

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-\bar{z})^2/2\sigma^2}$$

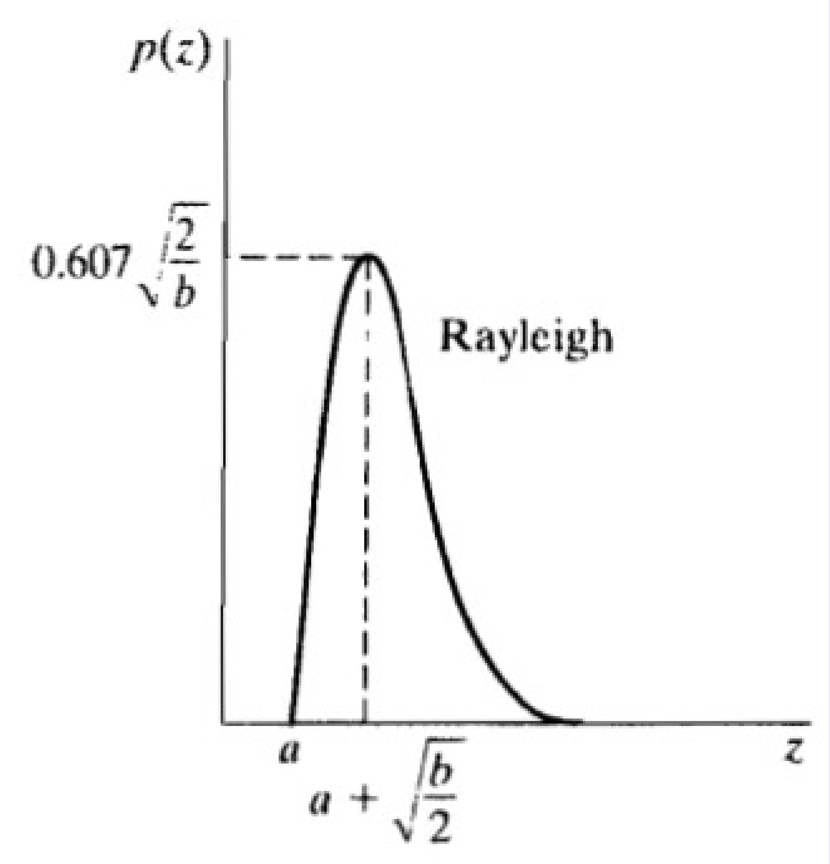


Ruido de Rayleigh

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z - a)e^{-(z-a)^2/b} & \text{for } z \geq a \\ 0 & \text{for } z < a \end{cases}$$

$$\bar{z} = a + \sqrt{\pi b/4}$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4 - \pi)}{4}$$

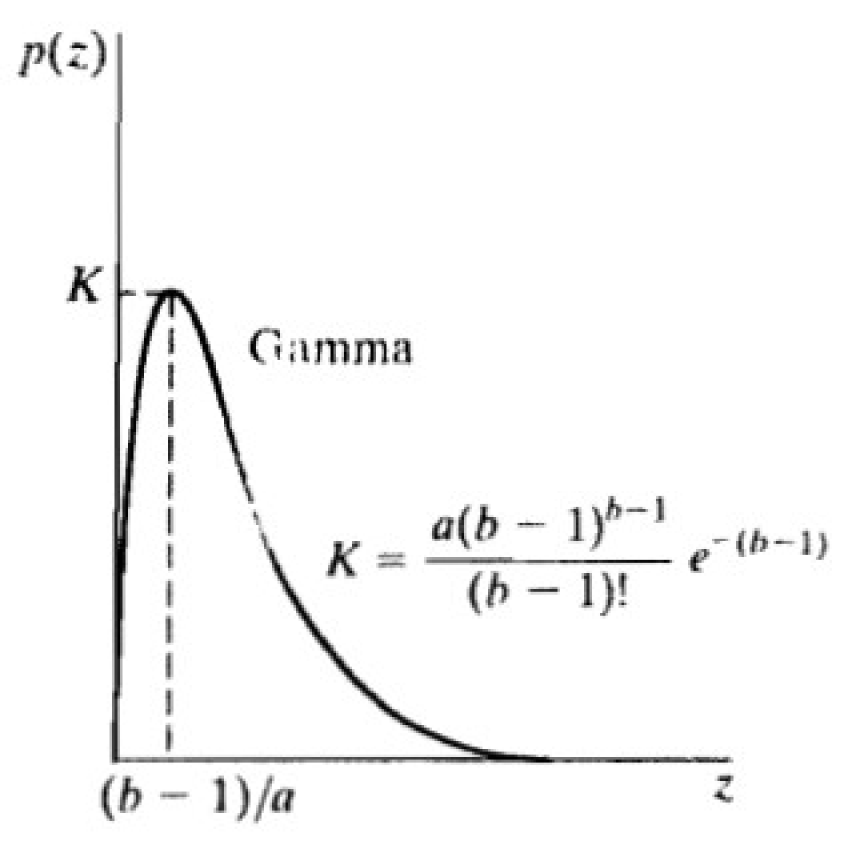


Ruido gama

$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

$$\bar{z} = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

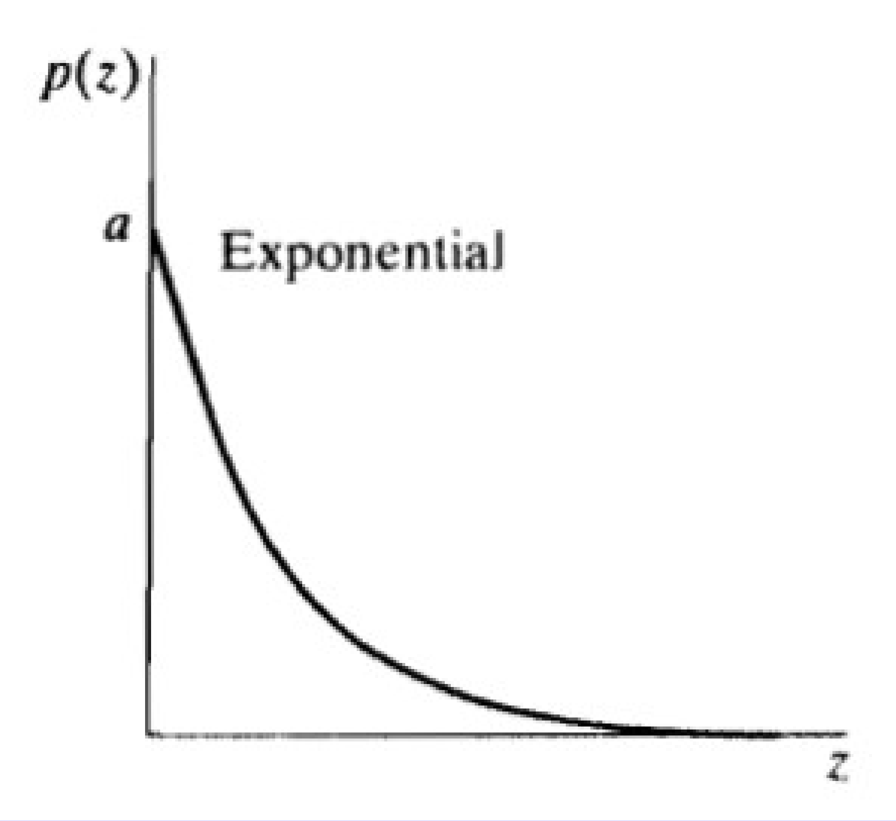


Ruido exponencial

$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{a}$$

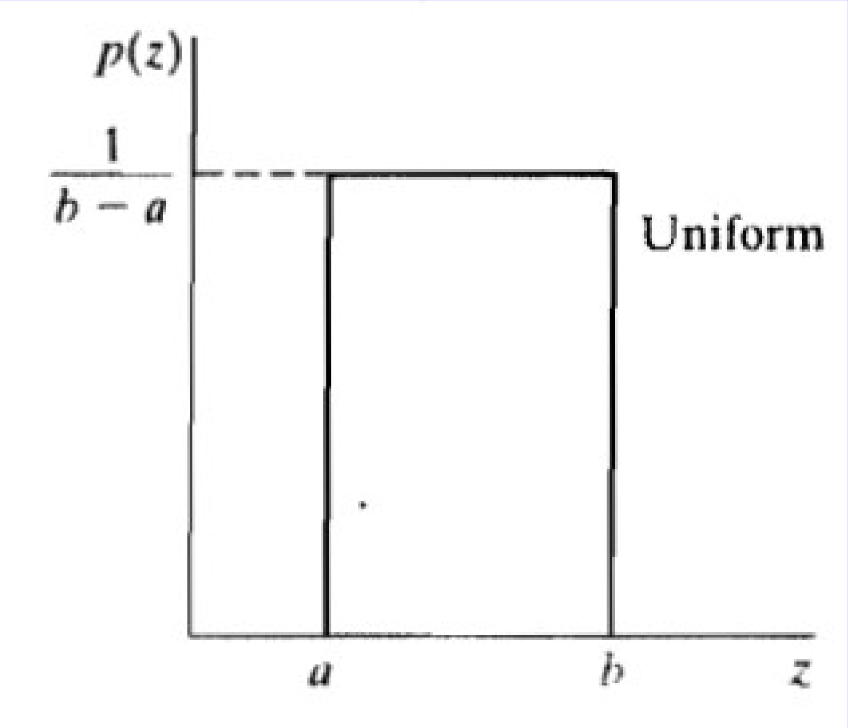
$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$



Ruido uniforme

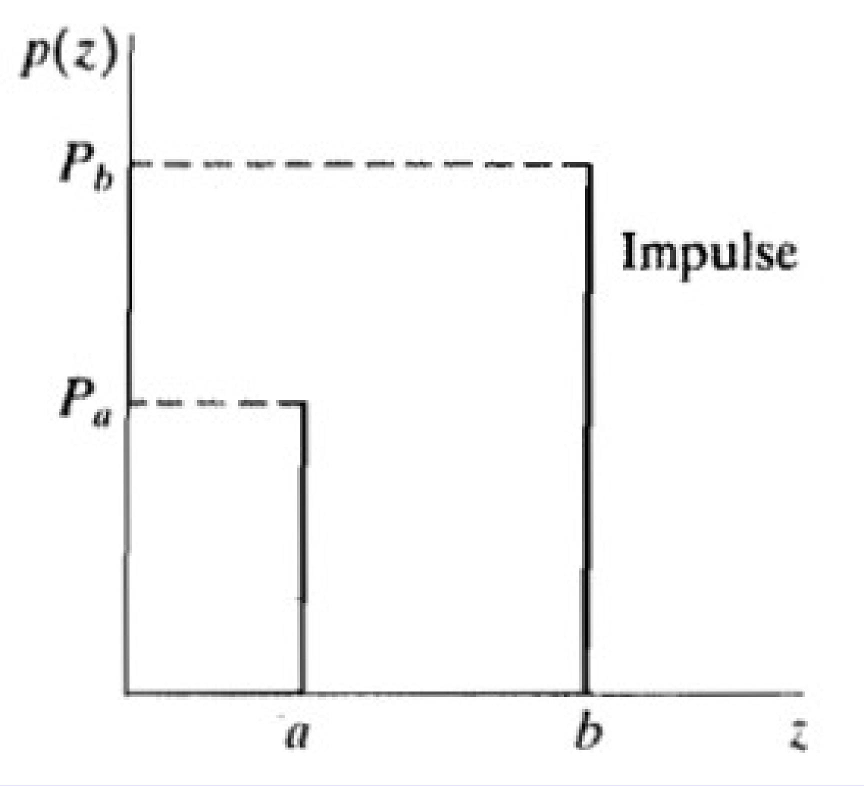
$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Ruido impulsivo

$$p(z) = \begin{cases} P_a & \text{for } z = a \\ P_b & \text{for } z = b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Restauración por filtrado espacial

- cuando la degradación se produce solo por ruido tenemos que:

$$g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

- la técnica a usar en este caso es el filtrado espacial.

Restauración por filtrado espacial

- se usa un kernel rectangular centrado.
- se evalúa un conjunto $S_{x,y}$ de m*n pixels centrado en (x,y).
- el resultado es la imagen donde se reemplaza cada pixel con una operación sobre el conjunto $S_{x,y}$.
- filtro de media aritmética:

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)$$

suaviza variaciones locales y el ruido se reduce debido a la pérdida de definición.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de media geométrica:

$$\hat{f}(x, y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

el efecto es similar al filtro de media aritmética pero se pierde menos detalle de la imagen.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de media armónica:

$$\hat{f}(x,y) = \frac{mn}{\displaystyle\sum_{(s,t)\in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$

trabaja bien sobre ruidos gaussianos e impulsivos.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de media contra armónica:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\displaystyle\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\displaystyle\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$

el parámetro Q se denomina orden del filtro. Trabaja muy bien sobre ruidos impulsivos.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de mediana:

$$\hat{f}(x,y) = \underset{(s,t)\in S_{xy}}{\text{median}}\{g(s,t)\}$$

Es un filtro de orden estadístico provee resultados similares a los filtros de media pero preservan mejor las características de la imagen.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de máximo o mínimo:

$$\hat{f}(x,y) = \max_{(s,t)\in S_{xy}} \{g(s,t)\}$$

$$\hat{f}(x,y) = \min_{(s,t)\in S_{xy}} \{g(s,t)\}$$

son filtros de orden estadístico que eliminan el ruido al seleccionar sólo el valor máximo o el mínimo en un área alrededor del pixel.

Restauración por filtrado espacial

- filtro de punto medio:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2}\left[\max_{(s,t)\in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t)\in S_{xy}} \{g(s, t)\}\right]$$

Es un filtro que combina la estadística con el promediado. Es útil para ruido gaussiano o uniforme.

Restauración por filtrado espacial

• filtro de media con recorte:

Supongamos que de la región cubierta por el kernel despreciamos d/2 pixels con los valores más bajos y d/2 con los valores más altos, y obtenemos el valor medio de los restantes:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

Este filtro es útil cuando la imagen está afectada por diferentes tipos de ruidos.

Restauración por filtrado espacial

• filtros adaptivos:

- un filtro adaptivo es el que modifica su comportamiento según ciertos parámetros estadísticos dentro del área del kernel utilizado.
- estos filtros dan un mejor resultado que los que vimos hasta ahora a costa de una mayor complejidad en su implementación.

Restauración por filtrado espacial

• filtro adaptivo para reducción local del ruido:

Si σ^2_η es la varianza del ruido que degrada la imagen, σ^2_L es la varianza del ruido local en el kernel, y m_L es el valor medio local, el filtro es:

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma^2_\eta}{\sigma^2_L}\left[g(x, y) - m_L\right]$$

En general, $\sigma^2_\eta < \sigma^2_L$. Si esta condición no se da, se asume que ambas varianzas son iguales (no linealidad del filtro).

Restauración por filtrado espacial

- filtro adaptivo para reducción local del ruido:

1. If σ_η^2 is zero, the filter should return simply the value of $g(x, y)$. This is the trivial, zero-noise case in which $g(x, y)$ is equal to $f(x, y)$.
2. If the local variance is high relative to σ_η^2, the filter should return a value close to $g(x, y)$. A high local variance typically is associated with edges, and these should be preserved.
3. If the two variances are equal, we want the filter to return the arithmetic mean value of the pixels in S_{xy}. This condition occurs when the local area has the same properties as the overall image, and local noise is to be reduced simply by averaging.

Restauración por filtrado en frecuencia

- cuando la degradación no depende de la posición tenemos que:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

- por el momento ausmamos que no hay ruido:

$$\eta(x, y) = 0.$$

$$g(x, y) = H[f(x, y)]$$

Restauración por filtrado en frecuencia

- en ese caso decimos que H es lineal si:

$$H[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = aH[f_1(x, y)] + bH[f_2(x, y)]$$

donde a y b son escalares y $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son dos imagenes. Si a = b = 1:

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)]$$

que corresponde a la propiedad de aditividad.

Restauración por filtrado en frecuencia

• si $f_2(x,y) = 0$:

$$H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)]$$

que corresponde a la propiedad de homogeneidad.

• un operador H que produce una salida g(x,y):

$$g(x, y) = H[f(x, y)]$$

se dice que es espacialmente invariante si:

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

para cualquier valor de α y β.

Restauración por filtrado en frecuencia

- si convolucionamos una función f(x,y) con un impulso δ tenemos una nueva imagen:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

- si aplicamos un operador H obtenemos una imagen degradada:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)\, d\alpha\, d\beta\right]$$

Restauración por filtrado en frecuencia

- si H es un operador lineal:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H[f(\alpha, \beta)\delta(x - \alpha, y - \beta)] \, d\alpha \, d\beta$$

- como f(α,β) es independiente de (x,y) podemos aplicar la propiedad de homogeneidad para obtener:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) H[\delta(x - \alpha, y - \beta)] \, d\alpha \, d\beta$$

Restauración por filtrado en frecuencia

• el término:

$$h(x, \alpha, y, \beta) = H[\delta(x - \alpha, y - \beta)]$$

se denomina respuesta impulsiva del operador H, que es la respuesta de H a un pulso en coordenadas (x,y).

• en cualquier sistema óptico un pulso corresponde a un punto de luz y $h(x,\alpha,y,\beta)$ se denomina Point Spread Function (PSF).

Restauración por filtrado en frecuencia

- la expresión fundamental:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)h(x, \alpha, y, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

se denomina integral de superposición del primer tipo e indica que si la respuesta de H a un pulso es conocida, la respuesta de una imagen f(α,β) cualquiera se puede calcular.

- o sea, un sistema lineal H queda completamente caracterizado por su respuesta impulsiva.

Restauración por filtrado en frecuencia

- si H es espacialmente invariante:

$$H[\delta(x-\alpha, y-\beta)] = h(x-\alpha, y-\beta)$$

la integral anterior se reduce a:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)h(x-\alpha, y-\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

que corresponde a una convolución e indica que si conocemos la respuesta impulsiva del operador lineal su aplicación a cualquier imagen es conocida.

Restauración por filtrado en frecuencia

- si el ruido no es cero:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)h(x, \alpha, y, \beta)\, d\alpha\, d\beta + \eta(x, y)$$

y si H es espacialmente invariante:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)h(x - \alpha, y - \beta)\, d\alpha\, d\beta + \eta(x, y)$$

donde se asume que el ruido es aleatorio y espacialmente independiente.

Restauración por filtrado en frecuencia

• usando la notación usual para la convolución resulta en:

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

• para recuperar la imagen original se debe aplicar un filtro que realice el proceso inverso, lo que usualmente se indica como una restauración por deconvolución.