Procesamiento Avanzado de Imágenes Astronómicas

Wavelets y procesamiento en multiresolución

Multiresolución

- una imagen puede verse como un conjunto de áreas de diferentes tamaños, texturas y brillo que se unen para formar objetos.
- si los objetos son pequeños o tienen bajo contraste se los examina en alta resolución.
- si los objetos son grandes o tienen alto contraste se los examina en baja resolución.
- si existen objetos de diferentes tamaños o contrastes sería conveniente estudiarlos a diferentes resoluciones.

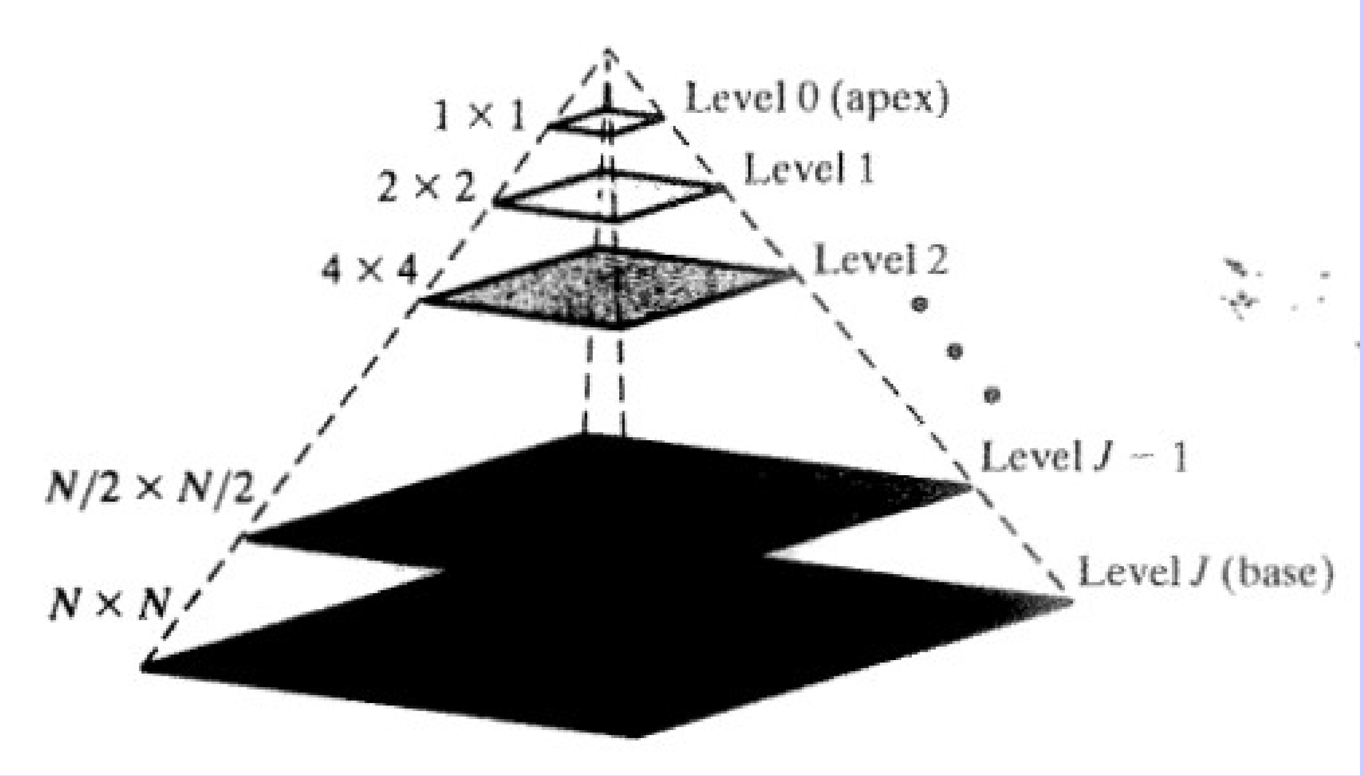
Multiresolución

- desde un punto de vista matemático, una imagen es un array bidimensional de intensidades con valores estadísticos variando localmente.
- la diferente estadística local se debe a la presencia de detalles abruptos, como bordes o áreas adjuntas de diferente contraste.
- diferentes regiones de la imagen producen histogramas diferentes, lo que resulta en estadística diferente.
- generalmente, es muy difícil o imposible lograr una representación estadística global de la imagen.

Descomposición piramidal

- una descomposición piramidal, o una pirámide de imágenes, permite representar una imagen a diferentes resoluciones (Burt & Adelson 1983).
- una pirámide es una descomposición a resolución y tamaño decreciente.
- la base tiene el máximo tamaño y resolución.
- el apex tiene el mínimo tamaño y resolución.
- si el lado de una imagen de la pirámide es $2^j \times 2^j$, al valor de j se lo denomina nivel o plano.
- siempre se construyen dos pirámides: una de aproximación y otra de detalles.

Descomposición piramidal

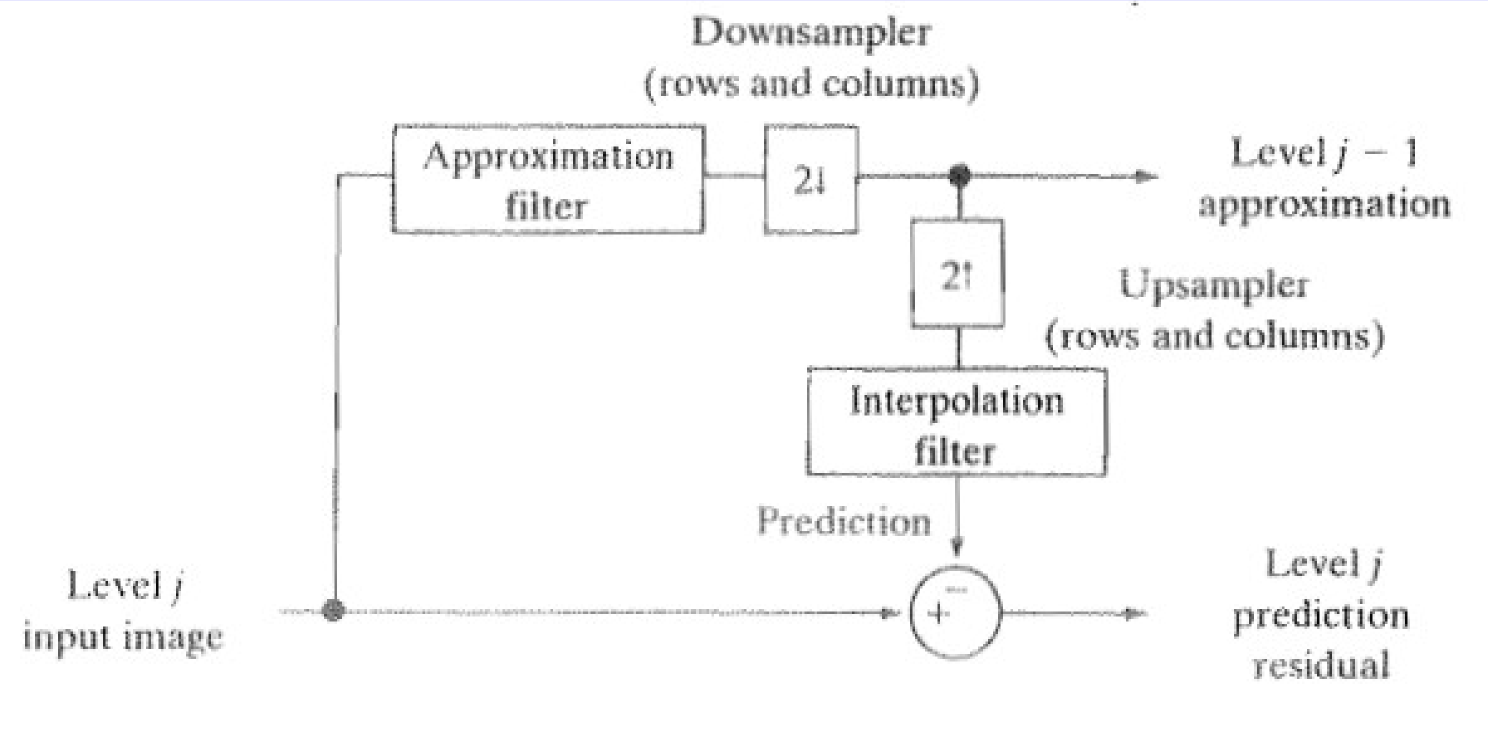


Descomposición piramidal

- ambas pirámides se calculan de manera iterativa:

1. Para un plano j, se obtiene una aproximación de resolución menor filtrando con pasabajos y reduciendo las dimensiones en un factor 2 para formar el plano j-1 de la pirámide de aproximación.
2. Se obtiene una predicción del plano j expandiendo en un factor 2 el plano j-1 e interpolando.
3. Se calcula la diferencia entre la imagen inicial y la predicción obtenida para armar el plano j de la pirámide de detalles.
4. En el plano más bajo de la pirámide de detalles se coloca el plano de aproximación equivalente.

Descomposición piramidal



Descomposición piramidal

- el filtrado se realiza en el dominio espacial.
- se pueden utilizar diversos filtros:

- Media aritmética, que producen pirámides de media.
- Gaussianos pasabajos, que producen pirámides gaussianas.
- No usar filtro, que producen pirámides de submuestreo.
- Filtro wavelet, que producen pirámides de wavelets.

- se pueden utilizar diferentes procesos para interpolar:

- Vecino más próximo.
- Bilineal.
- Bicúbica.

Descomposición piramidal

- si asumimos una secuencia unidimensional, un proceso de expansión (upsampling) es:

$$f_{2\uparrow}(n) = \begin{cases} f(n/2) & \text{if } n \text{ is even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

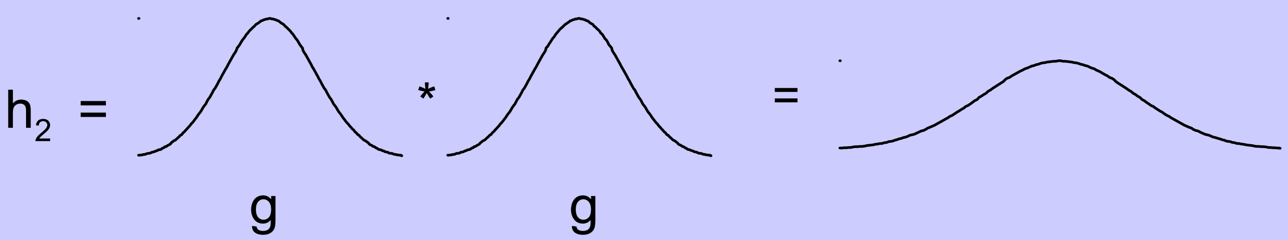
- y un proceso de reducción (downsampling):

$$f_{2\downarrow}(n) = f(2n)$$

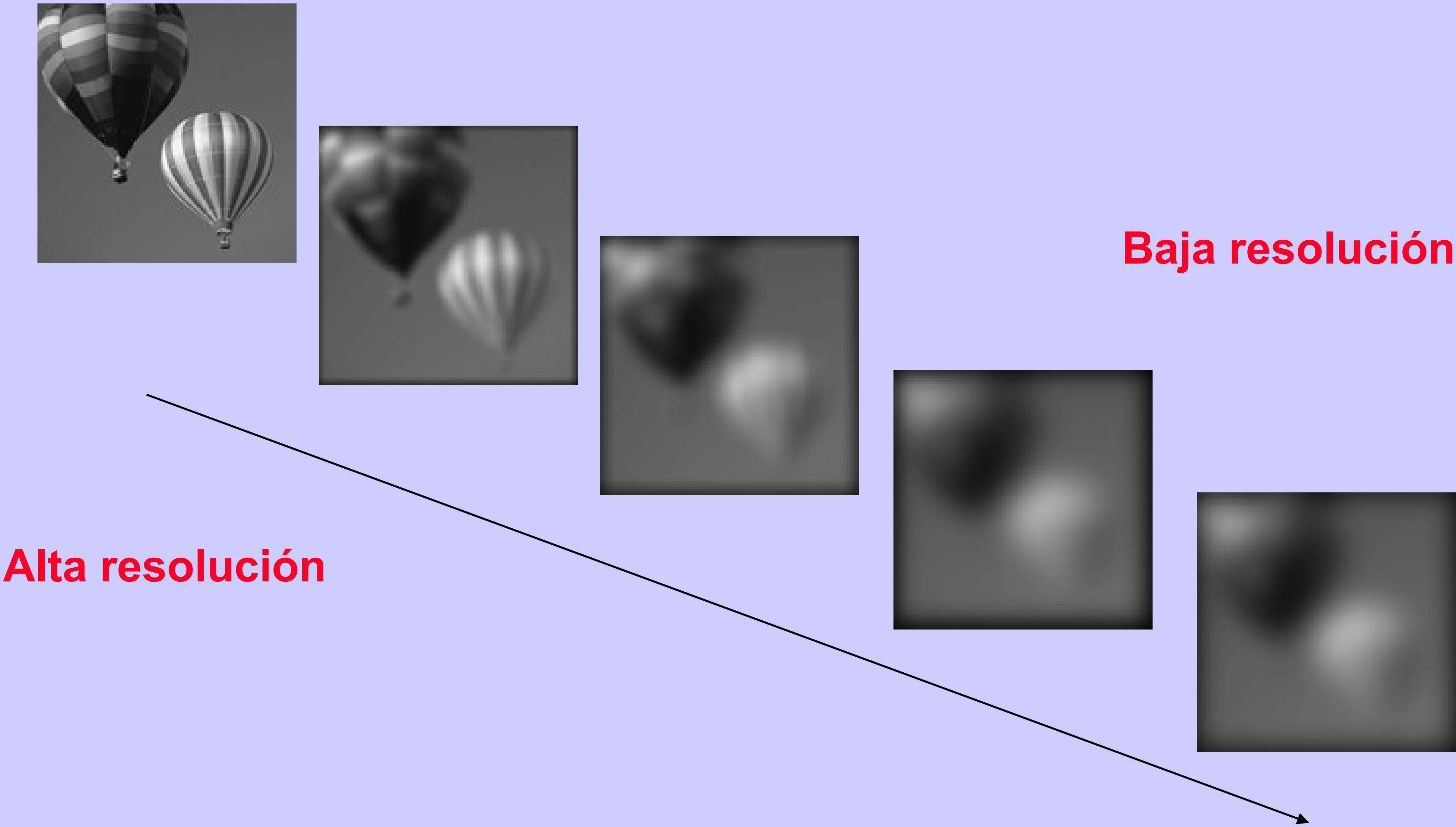
Descomposición piramidal

- el plano j puede calcularse con una convolución con filtro $h_j = \underbrace{g * g * g}_{\text{j veces}} * \ldots$

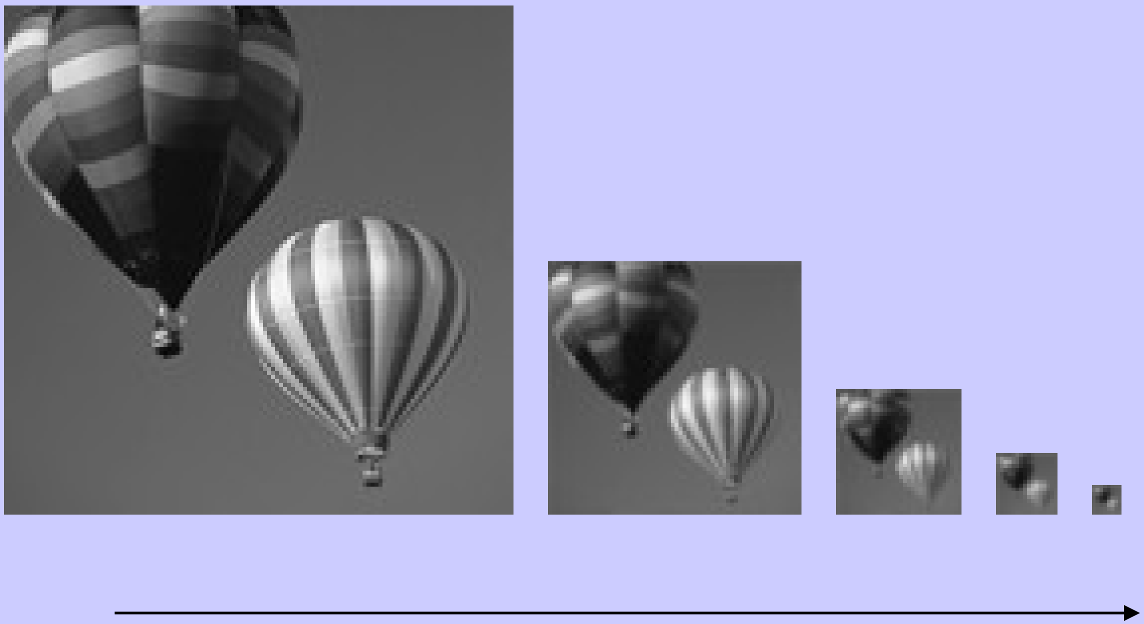
Ejemplo:



Descomposición piramidal

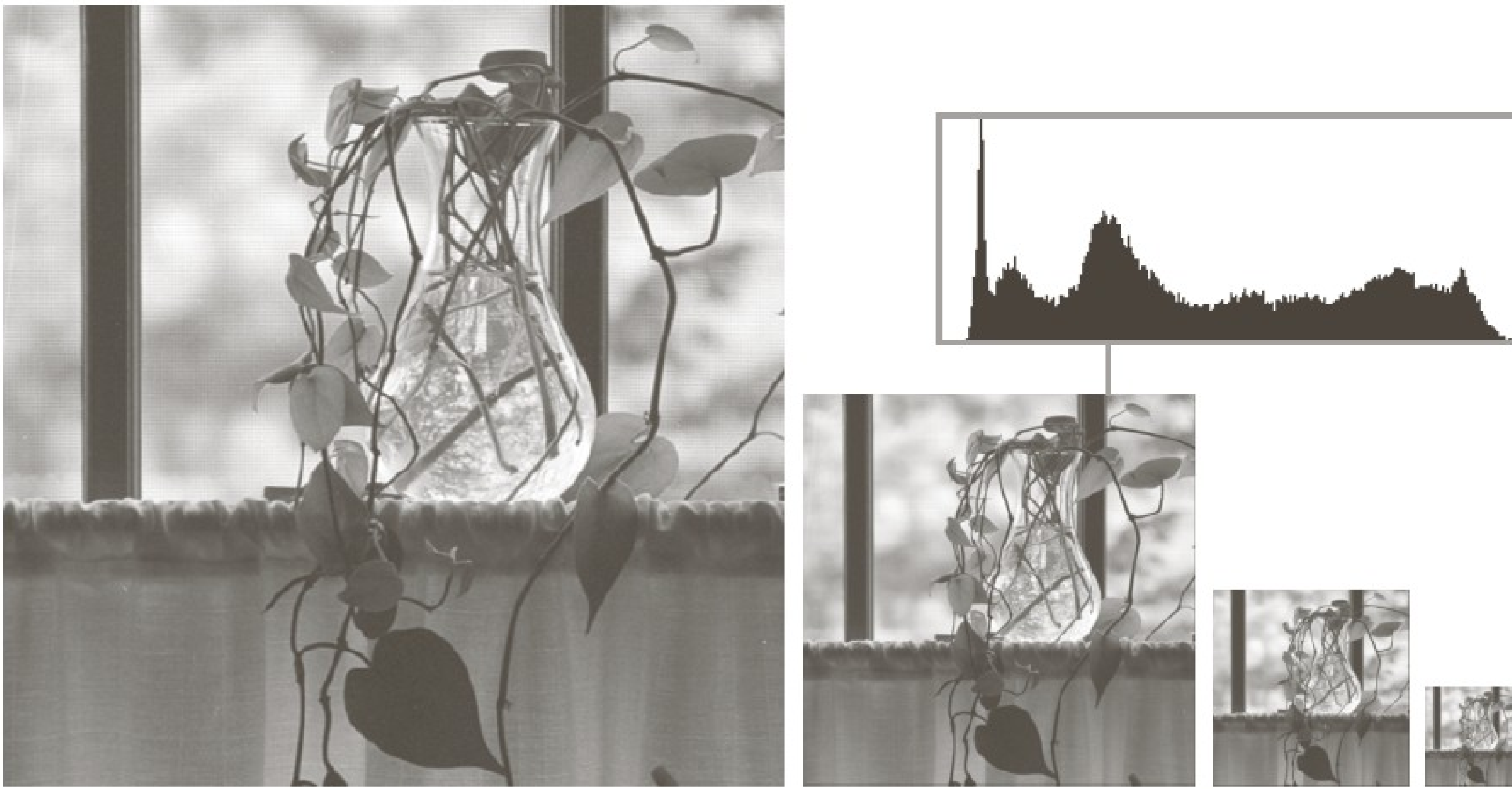


Descomposición piramidal

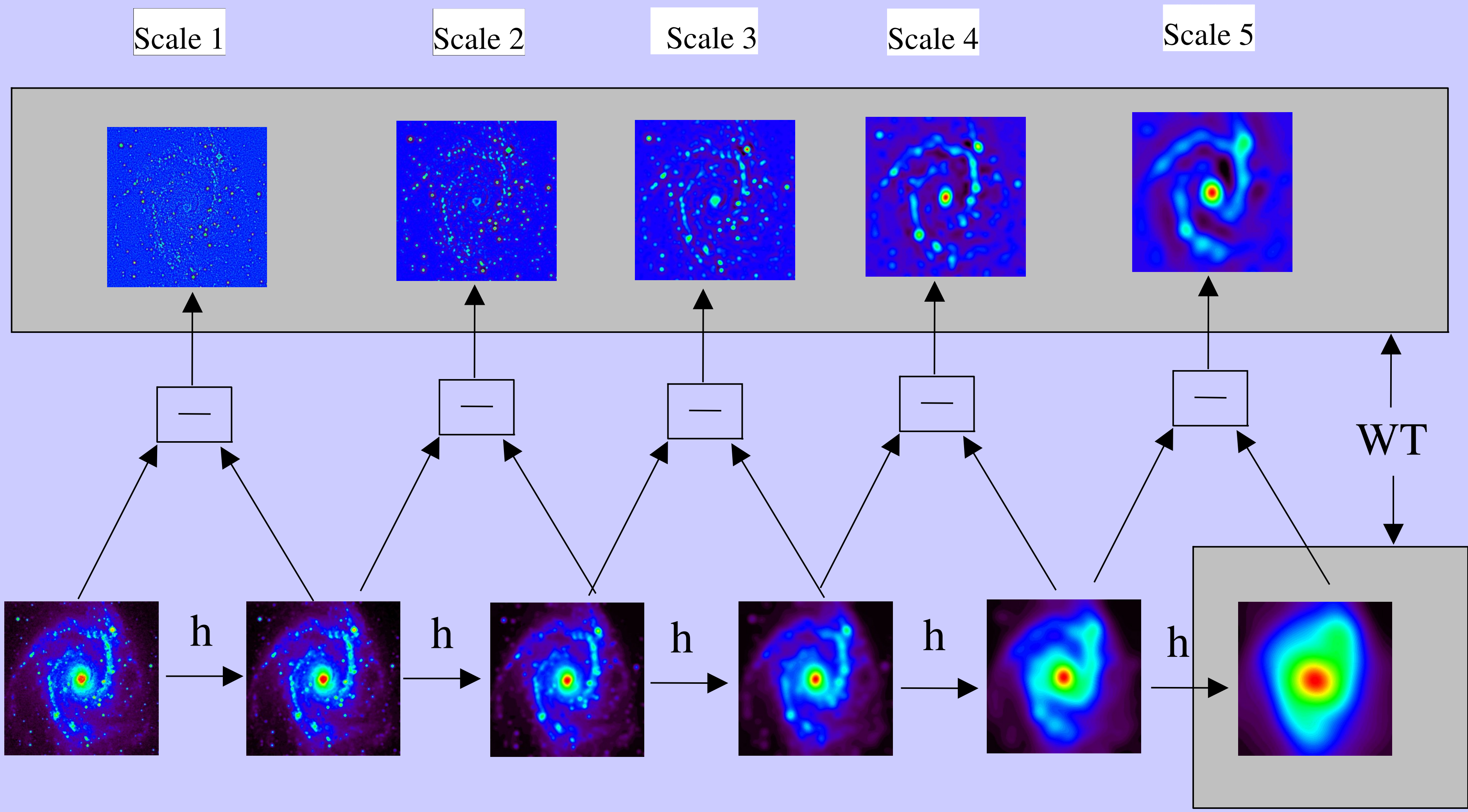


Alta resolución Baja resolución

Descomposición piramidal

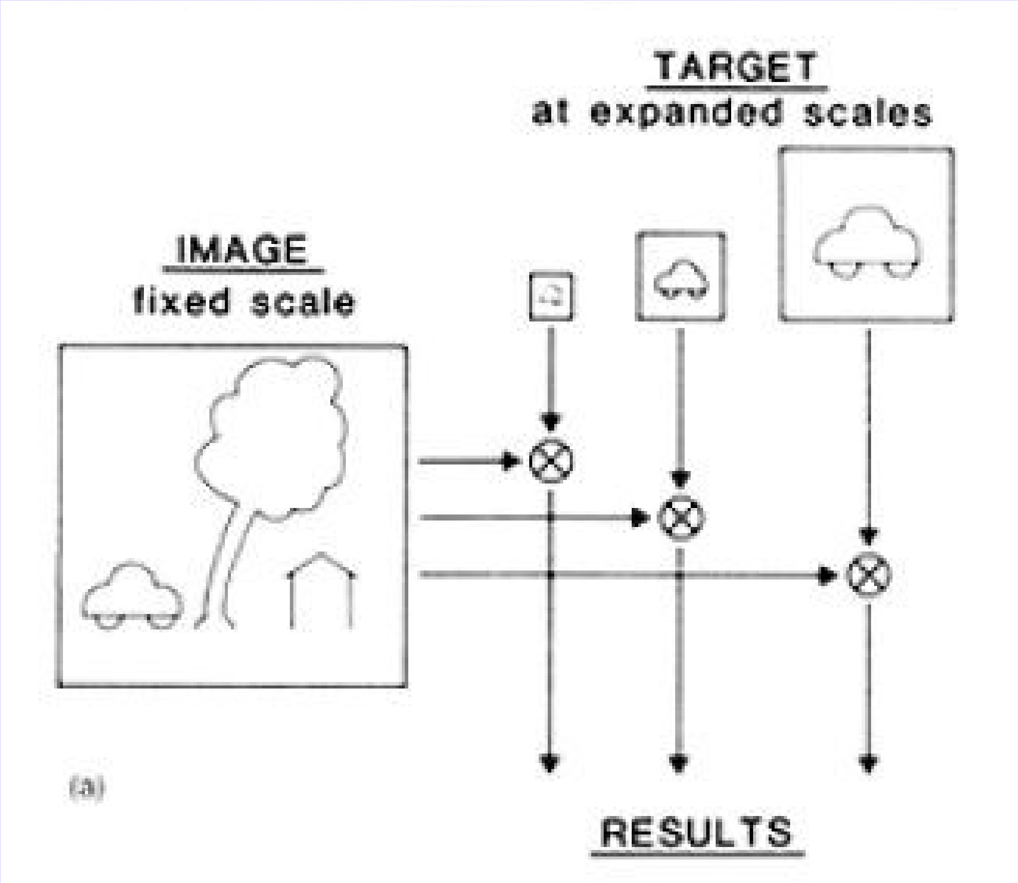


Descomposición piramidal



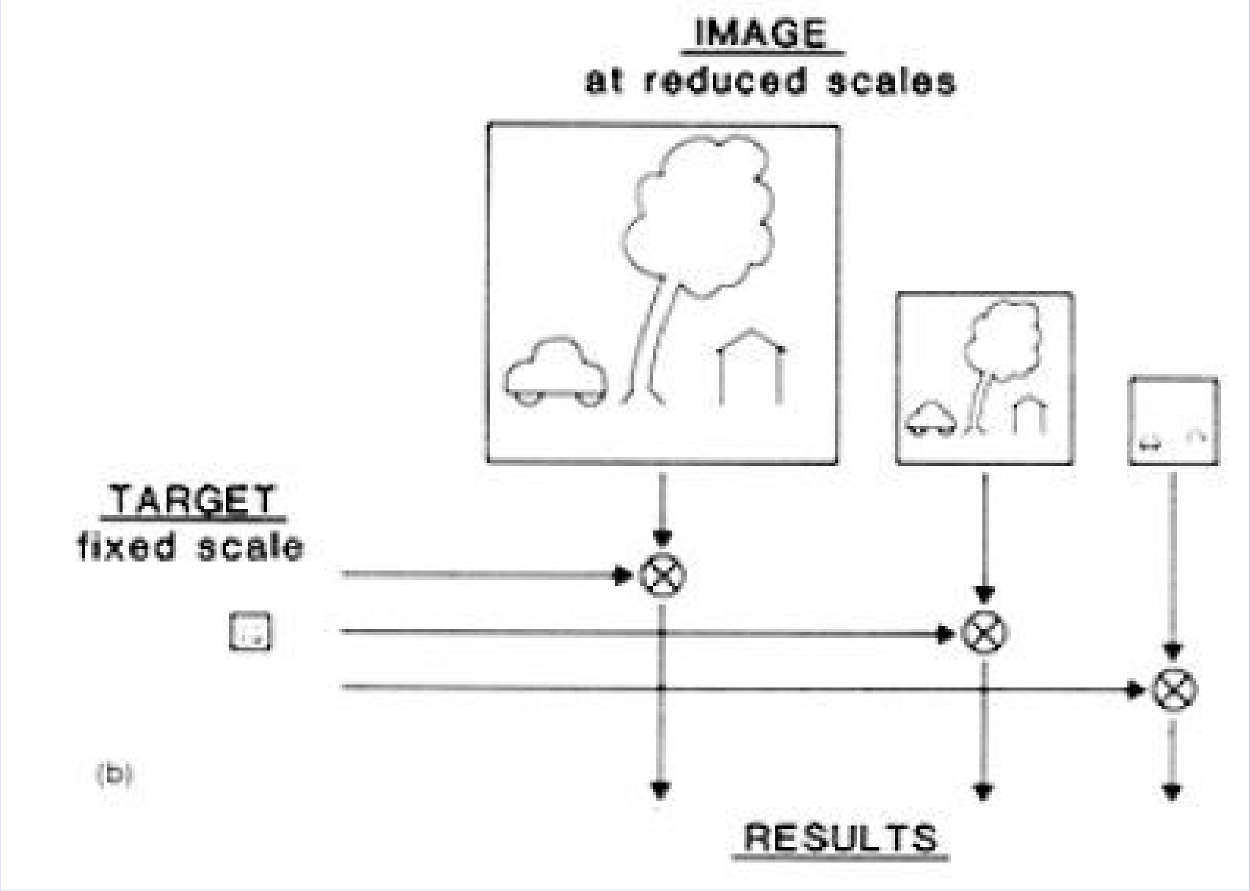
Descomposición piramidal

- ajuste de patrones en diferentes escalas:
  Opción 1: escalar el patrón y buscar en la imagen

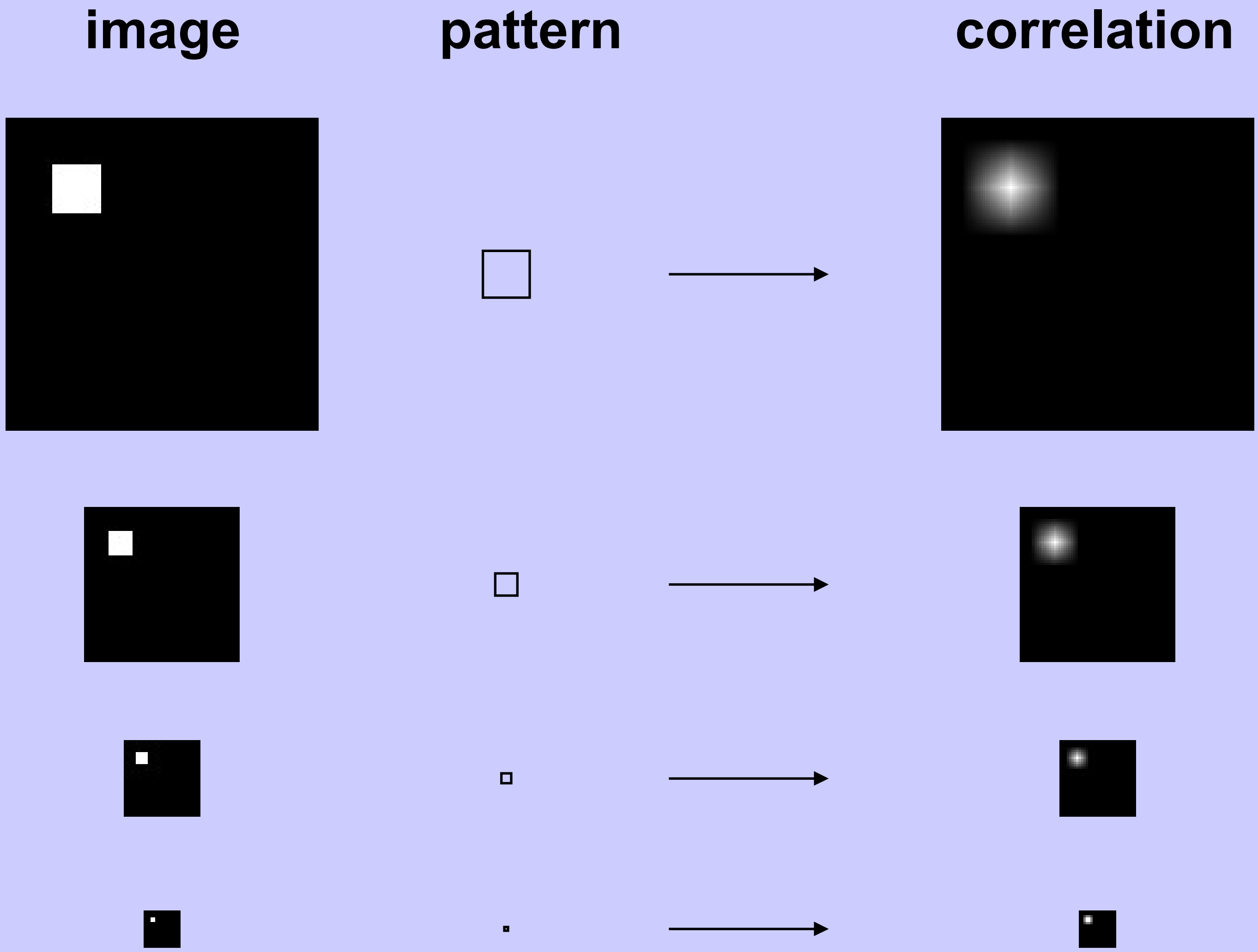


Descomposición piramidal

- ajuste de patrones en diferentes escalas:
  Opción 2: buscar el patrón original en la pirámide



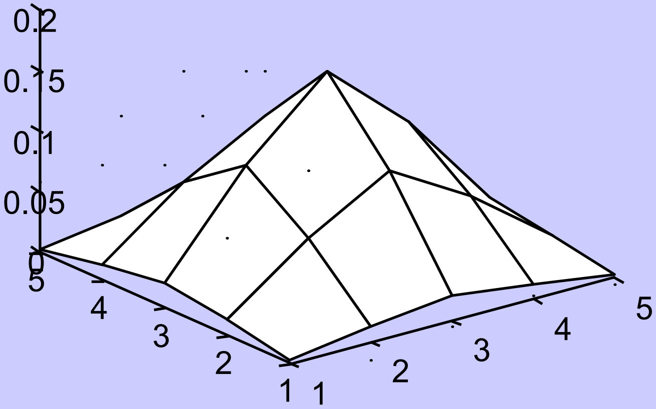
Descomposición piramidal



Piramide gaussiana

- se utiliza un filtro gaussiano y la suma de coeficientes del filtro debe ser cero.

g = [0.05 0.25 0.4 0.25 0.05]



low_pass_filter = g’ * g =

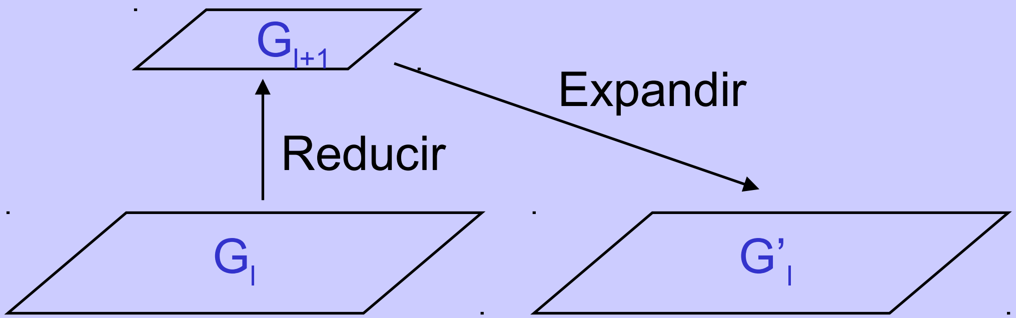
$$\begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0125 & 0.0200 & 0.0125 & 0.0025 \\ 0.0125 & 0.0625 & 0.1000 & 0.0625 & 0.0125 \\ 0.0200 & 0.1000 & 0.1600 & 0.1000 & 0.0200 \\ 0.0125 & 0.0625 & 0.1000 & 0.0625 & 0.0125 \\ 0.0025 & 0.0125 & 0.0200 & 0.0125 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

Piramide laplaciana

- una pirámide laplaciana es una pirámide cuyos planos son planos de detalles.

G_0, G_1, ... = planos de la pirámide gaussiana.

Predecir el plano G_l desde el plano G_{l-1} expandiendo G_{l-1} a G'_l



La diferencia entre el plano y su predicción es $\boxed{L_l = G_l - G'_l}$

Piramide laplaciana

original

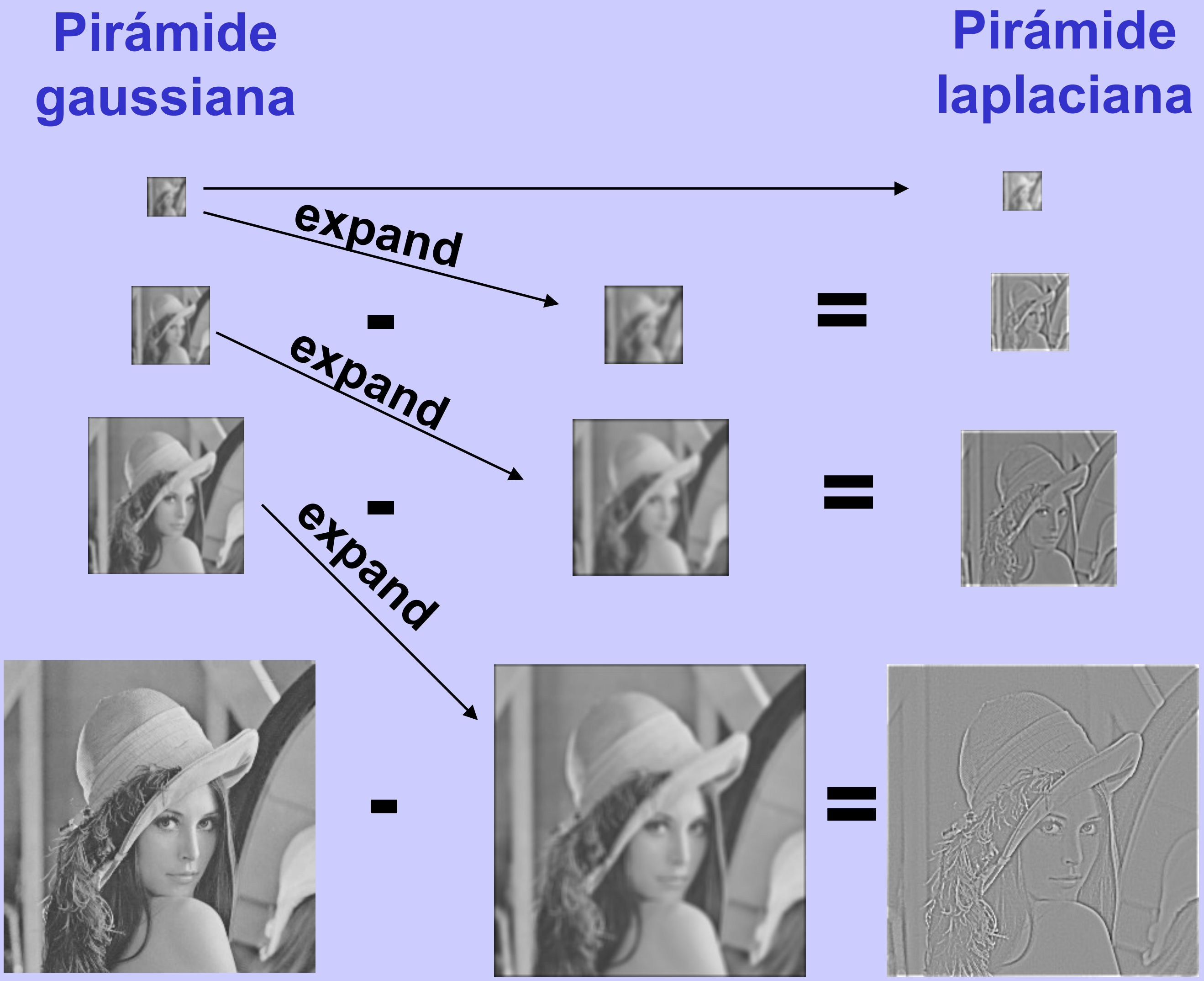
Piramide laplaciana

Filtrado
Gaussiano
5x5

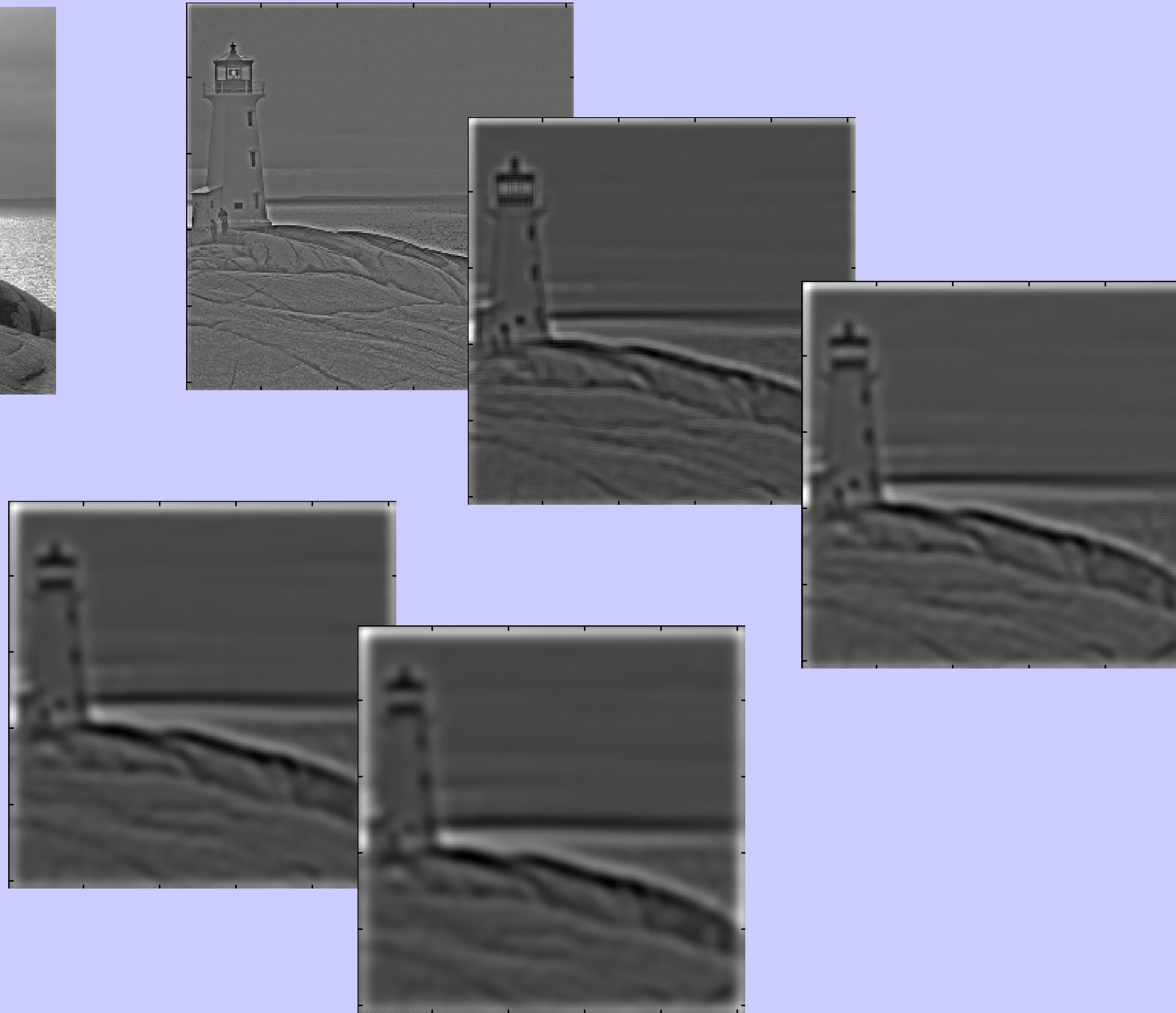
Piramide laplaciana

Diferencia

Piramide laplaciana

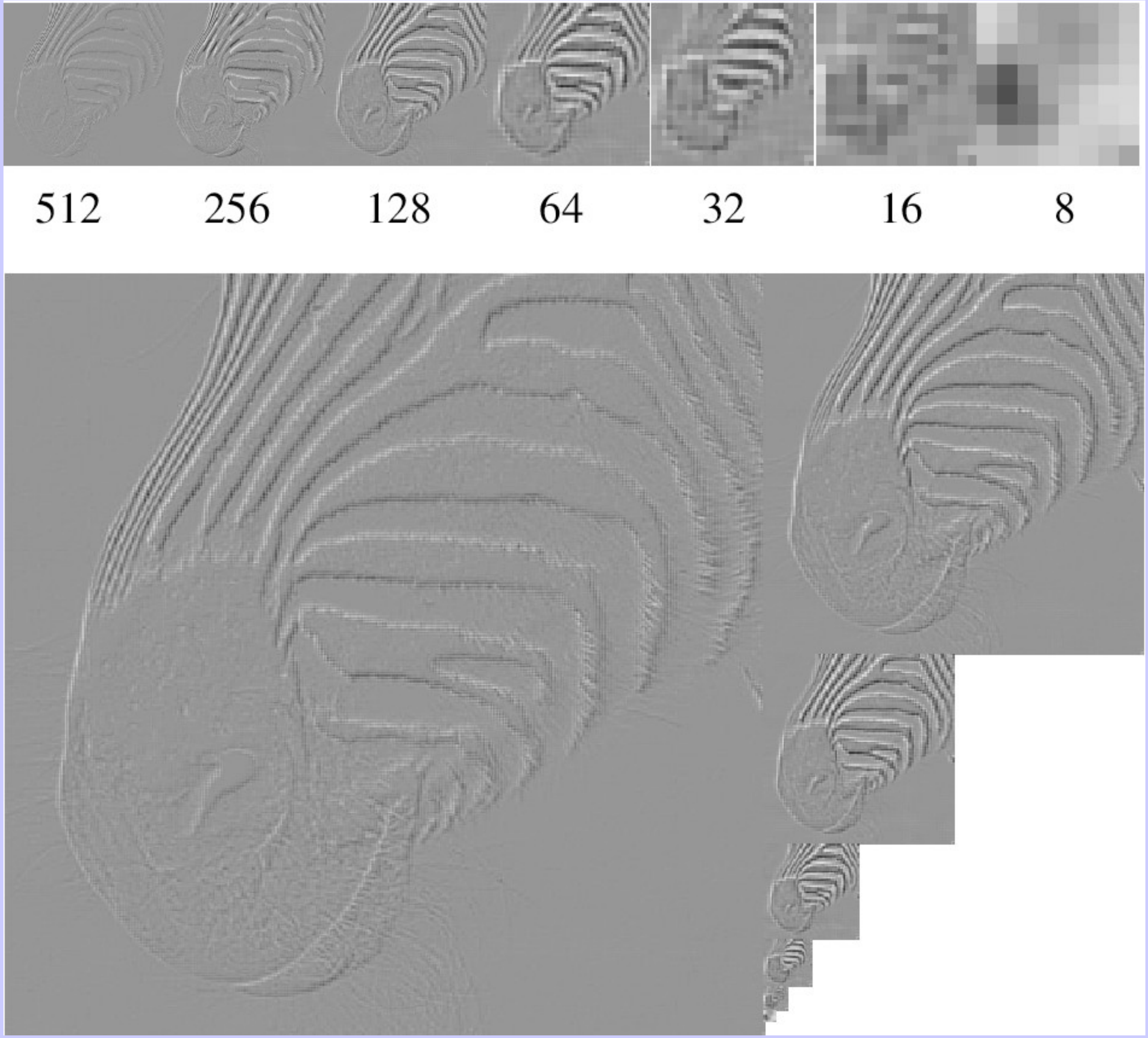


Piramide laplaciana

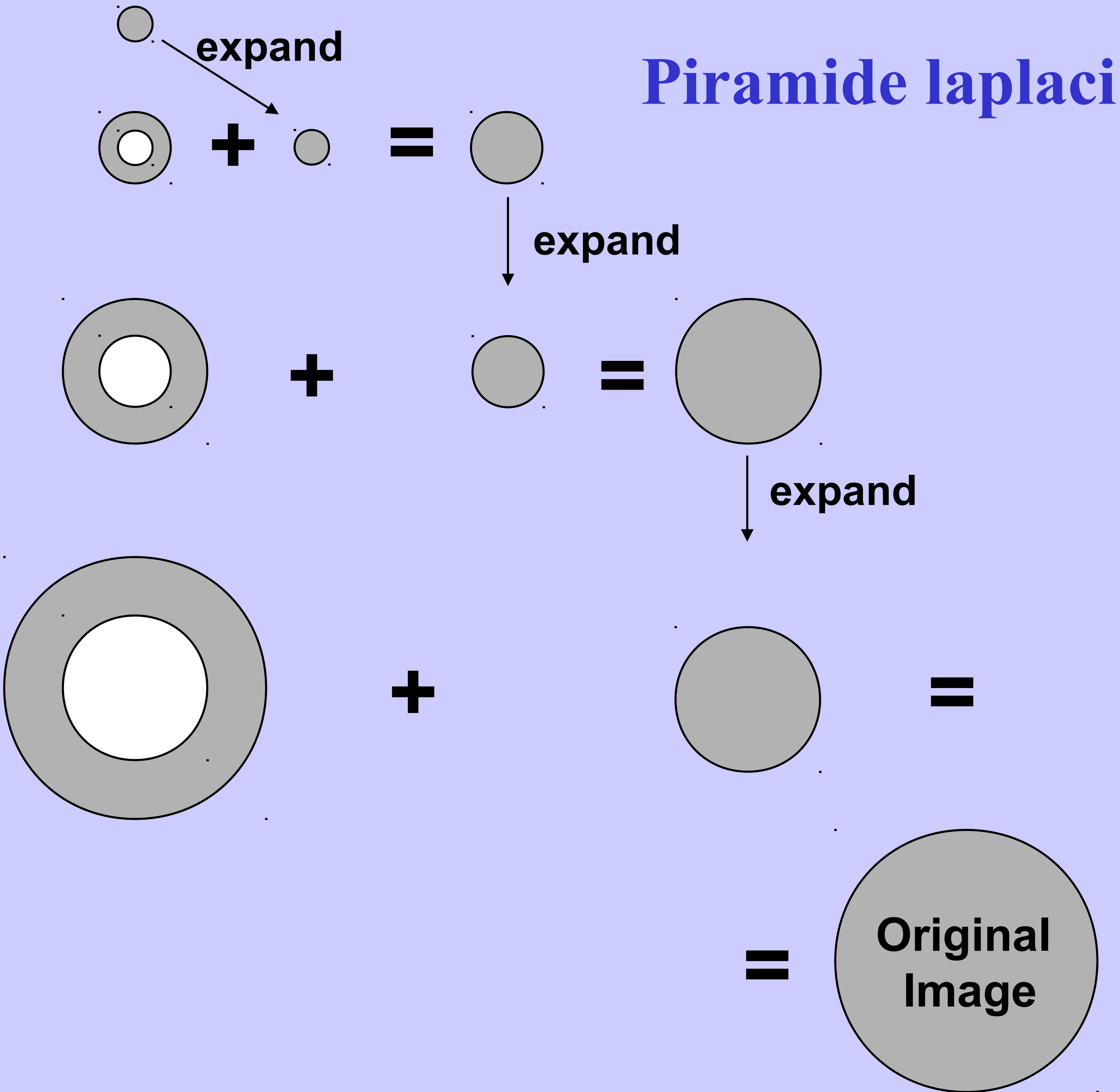


sin
escalar

Piramide laplaciana

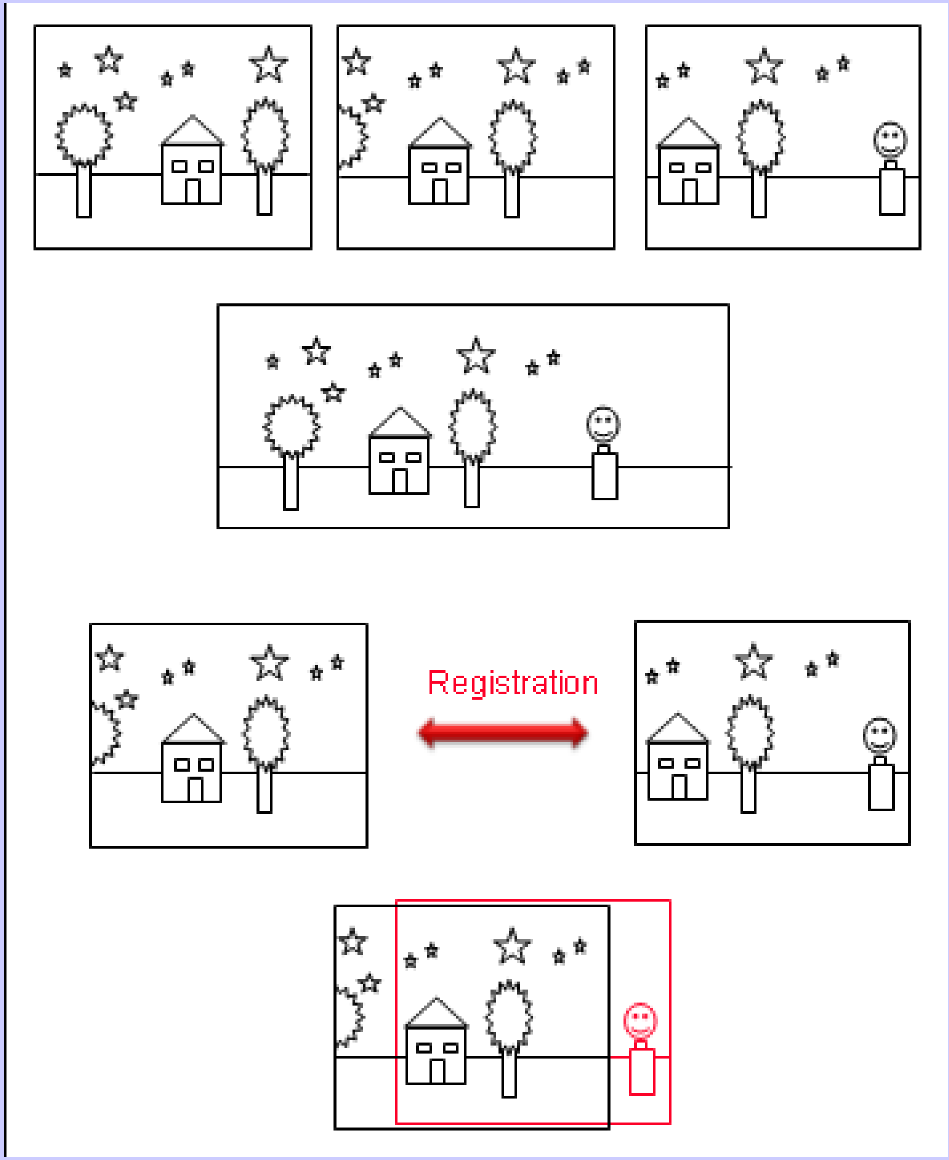


Piramide laplaciana



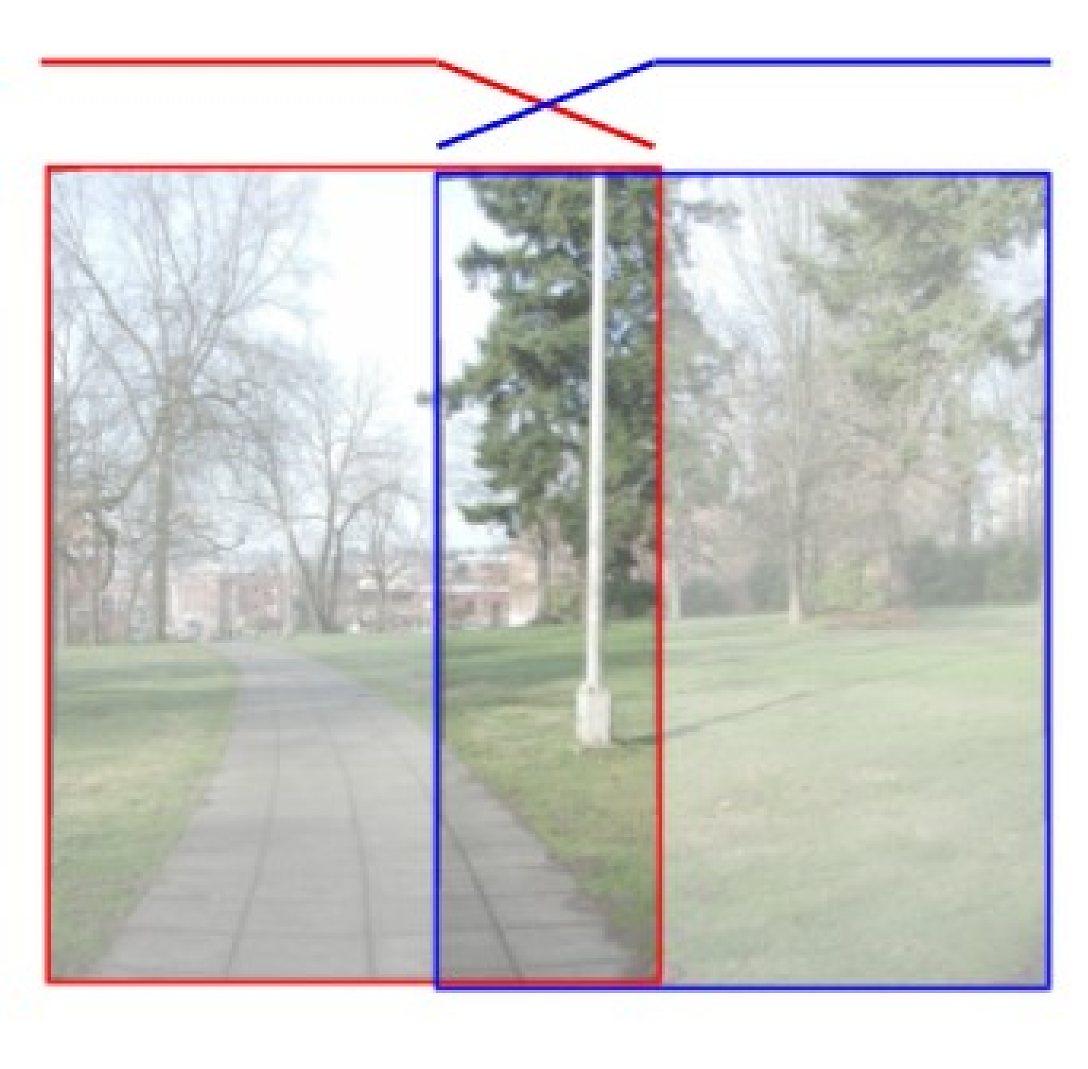
Piramide laplaciana

Mosaicos



Piramide laplaciana

Mosaicos

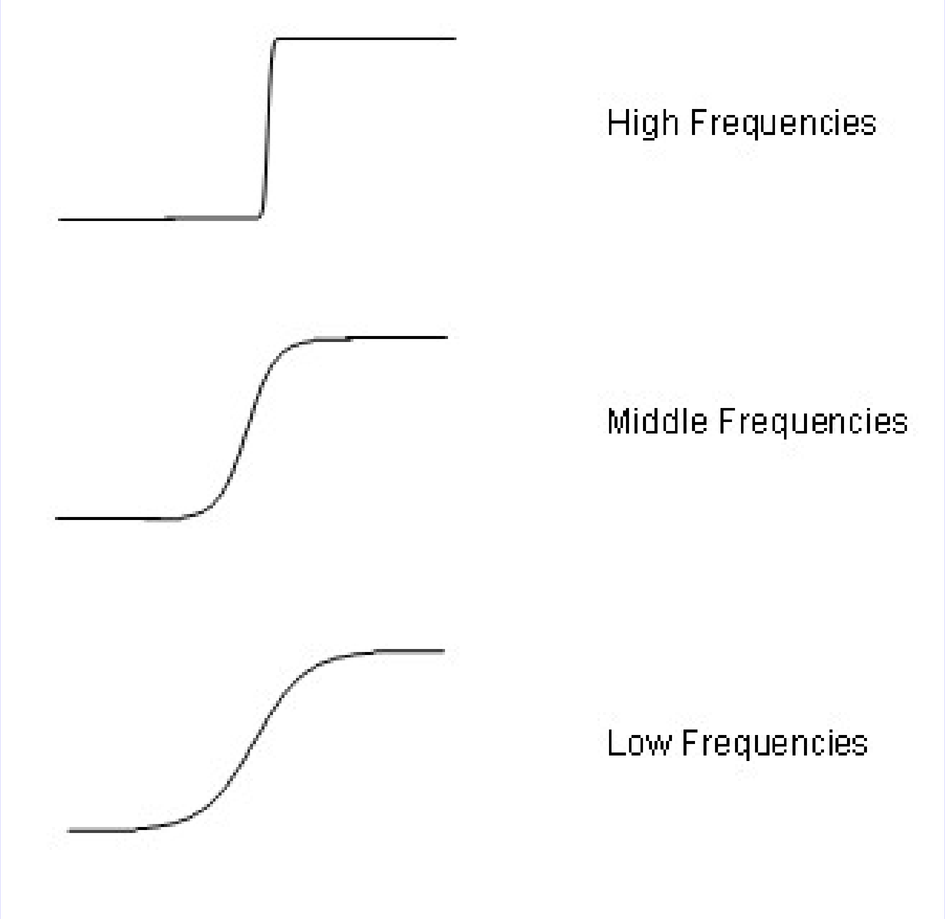


Piramide laplaciana

Mosaicos

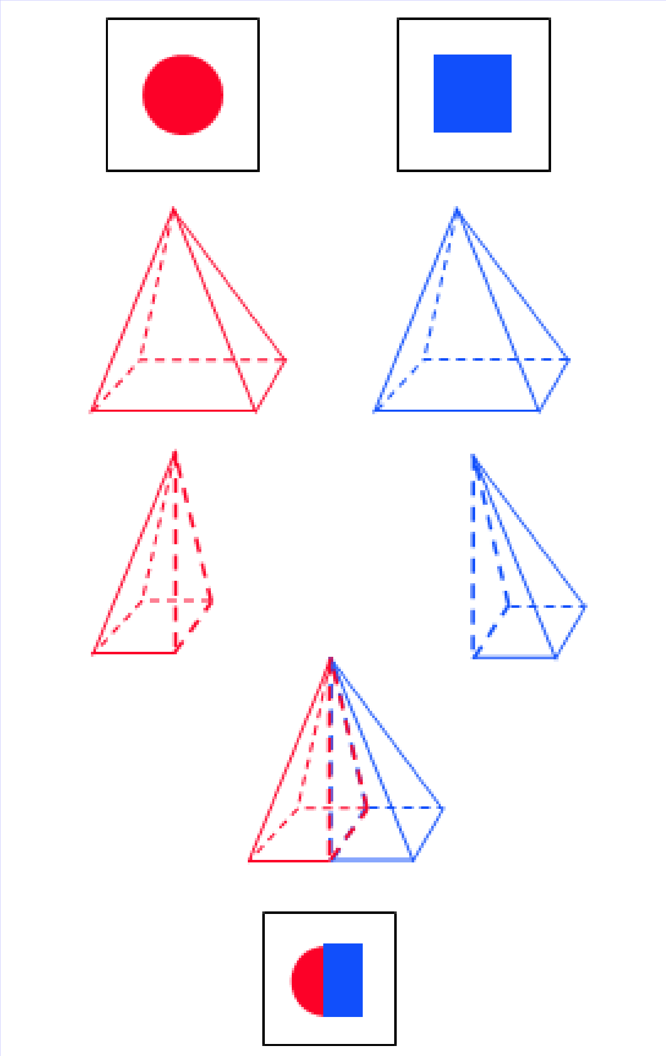
Piramide laplaciana

- al mezclar dos imágenes la transición de una a otra puede modelarse de diferentes modos:

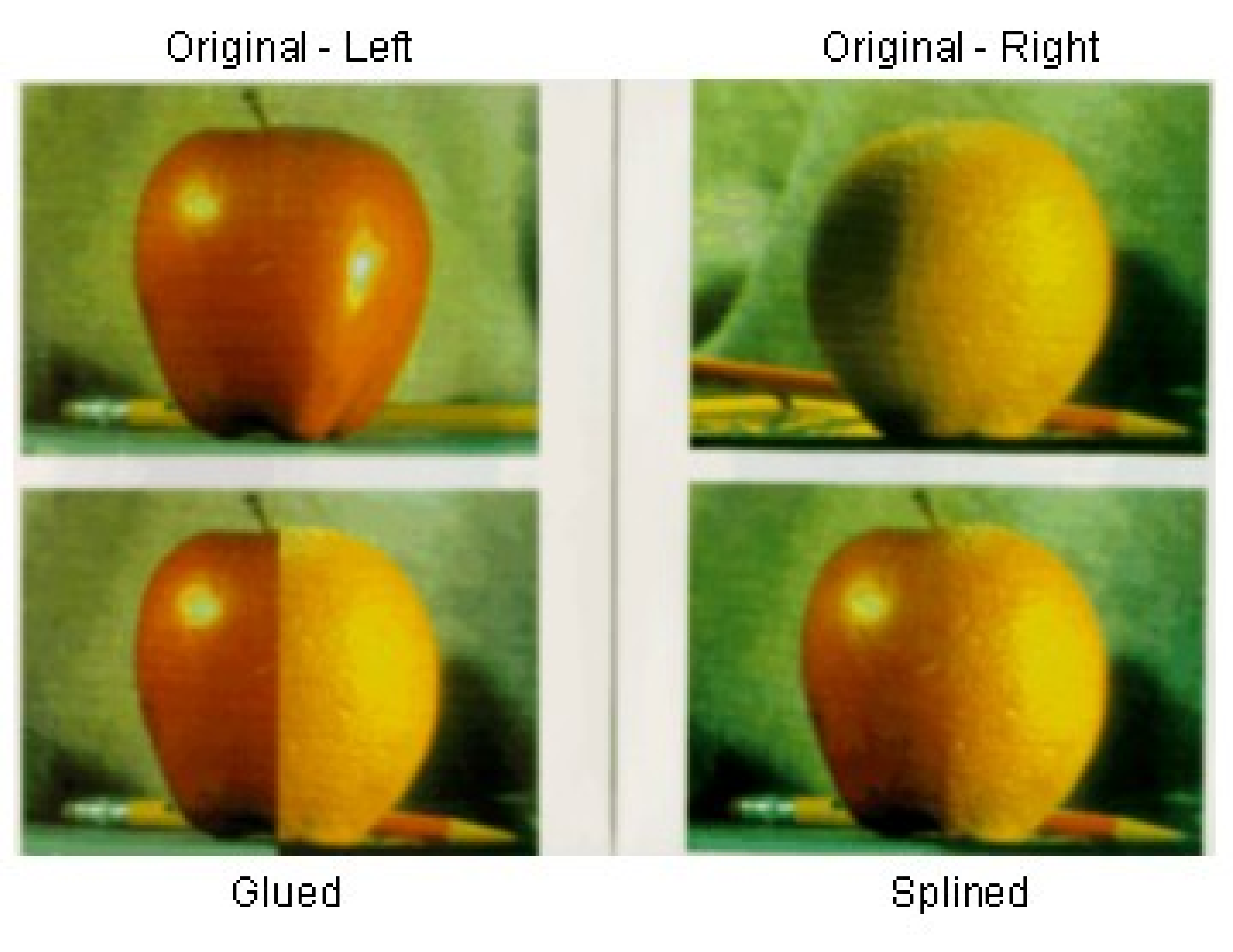


Piramide laplaciana

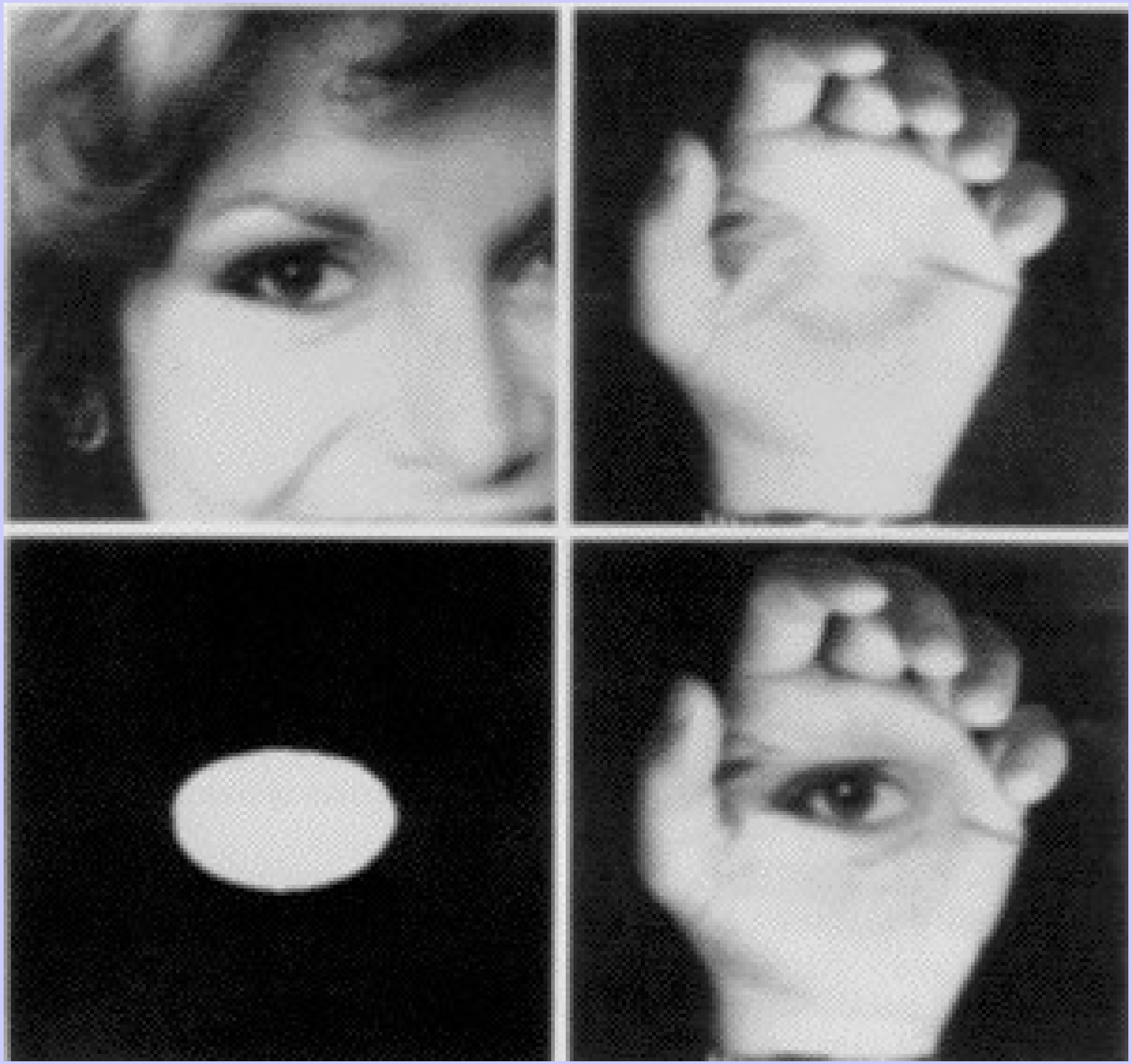
Supongamos que se quiere mezclar dos imágenes tomando la mitad de cada una



Piramide laplaciana



Piramide laplaciana



Wavelets

$$Complex\ Function = \sum_i (weight)_i \bullet (BasisFunction)_i$$

$$f = \sum_i F_i K_{ij} \qquad F_i = \sum_j K_{ij} f_j \quad \text{(discrete)}$$

$$f(x) = \int K(x,\omega) F(\omega) d\omega \quad \text{(continuous)}$$

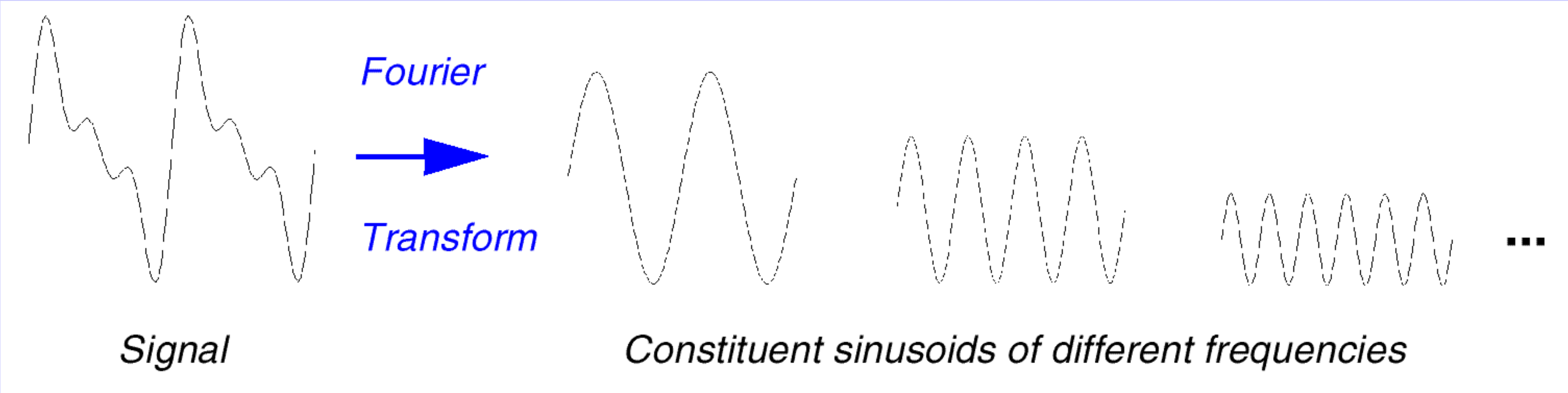
$$F(\omega) = \int K(x,\omega) f(x) dx$$

Wavelets

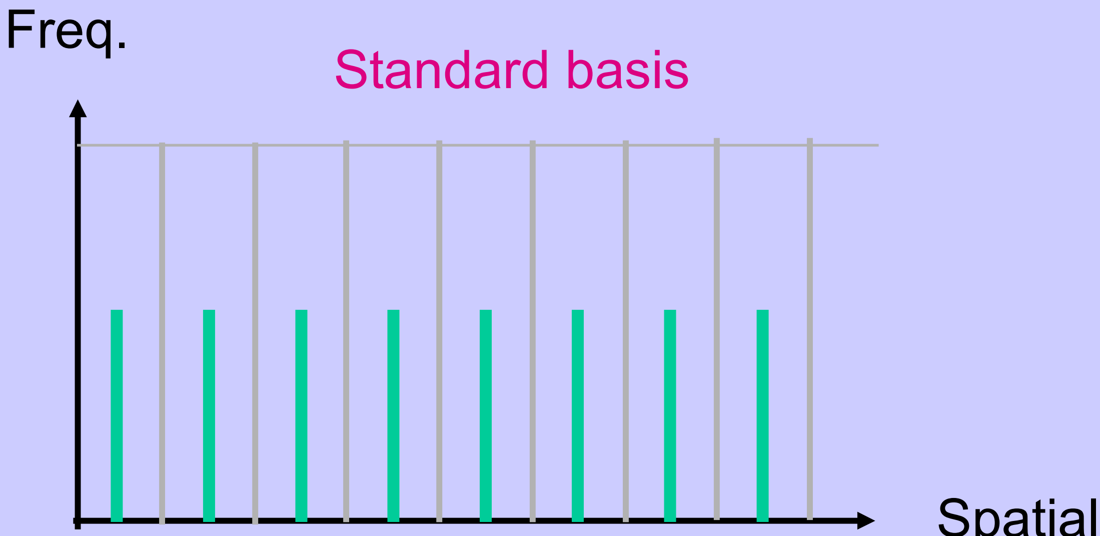
- Transformada de Fourier:

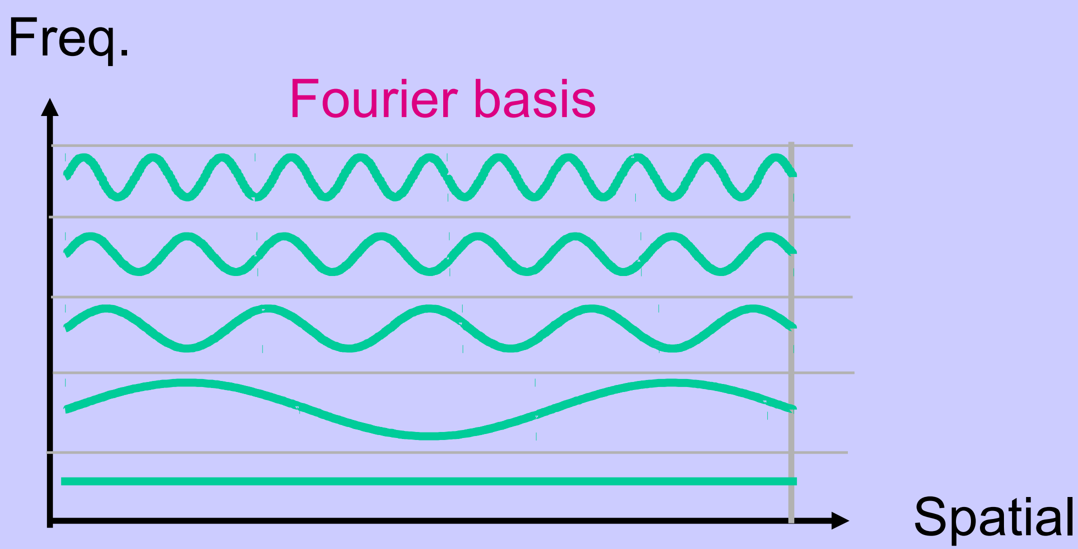
$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

- si se multiplican los coeficientes F(w) por la senoide de frecuencia correcta recupera la componente senoidal original.



Wavelets





Wavelets

- son pequeñas ondas de frecuencia variable y etensión limitada.
- su diferencia con la transformada de Fourier es que conserva información espacial.
- se utilizan en diferentes procesos de análisis y procesamiento de imágenes que se agrupan en el área de teoría de multiresolución.
- la teoría de multiresolución trata de la representación y análisis de señales (o imágenes) en más de una resolución.

Wavelets

$$W_i = \sum_j f_j \, K_{i,j}$$

$$f_j = \sum_i W_i \, K_{i,j}$$

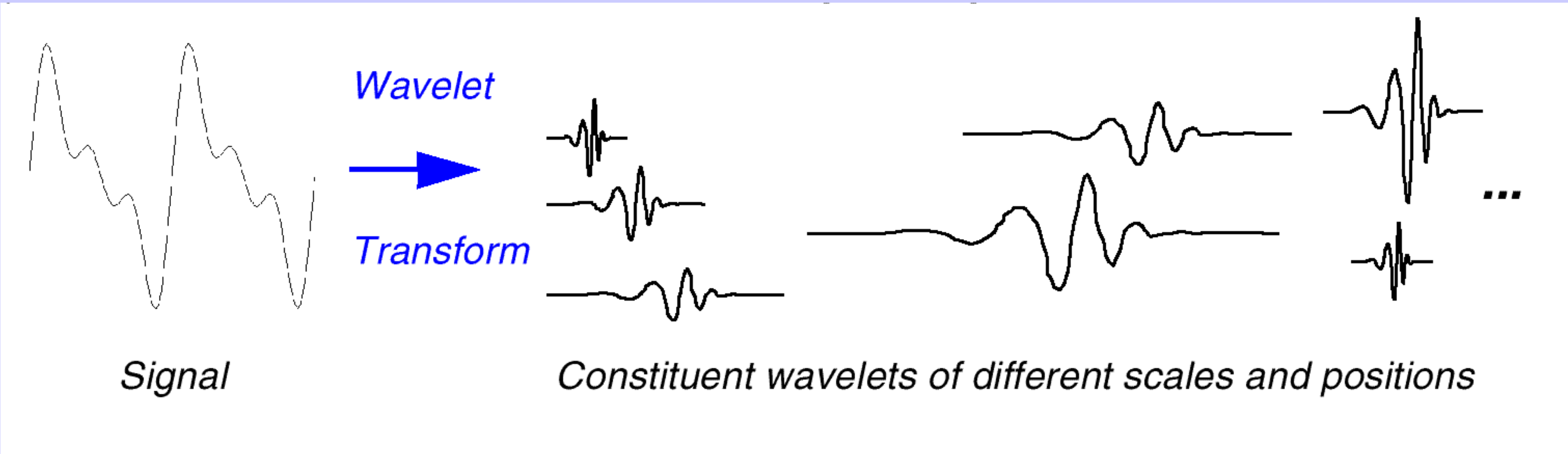
$$K_{i,j} \Rightarrow \Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \, \Psi_0 \left(\frac{x-b}{a} \right)$$

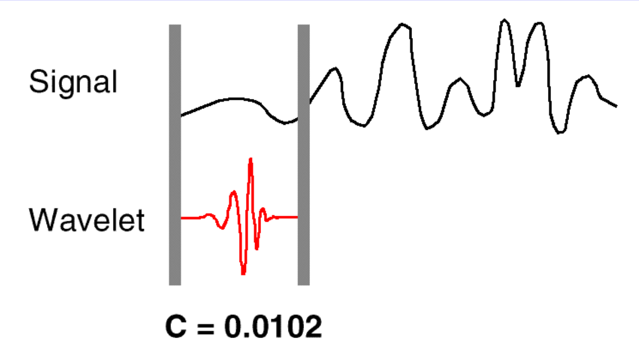
$$K_{i,j} \Rightarrow \Psi_{a,b_x,b_y}(x,y) = \frac{1}{|a|} \, \Psi_0 \left(\frac{x-b_x}{a}, \frac{y-b_y}{a} \right)$$

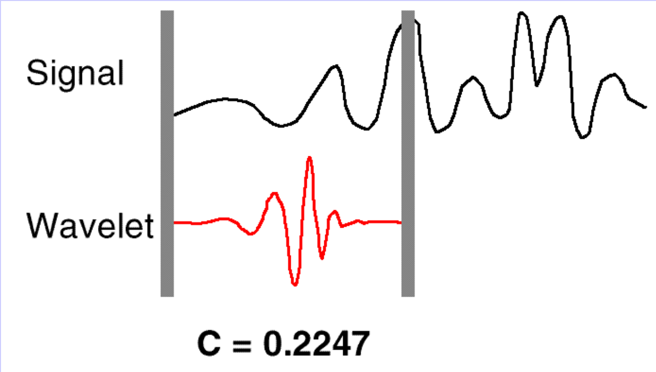
a = escala , b, b_x, b_y = desplazamientos

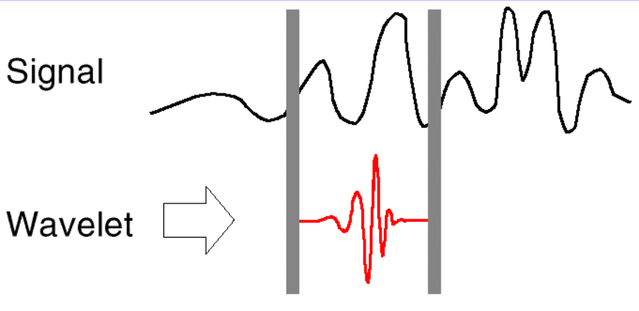
La integral de Ψ_0 debe ser cero

Wavelets





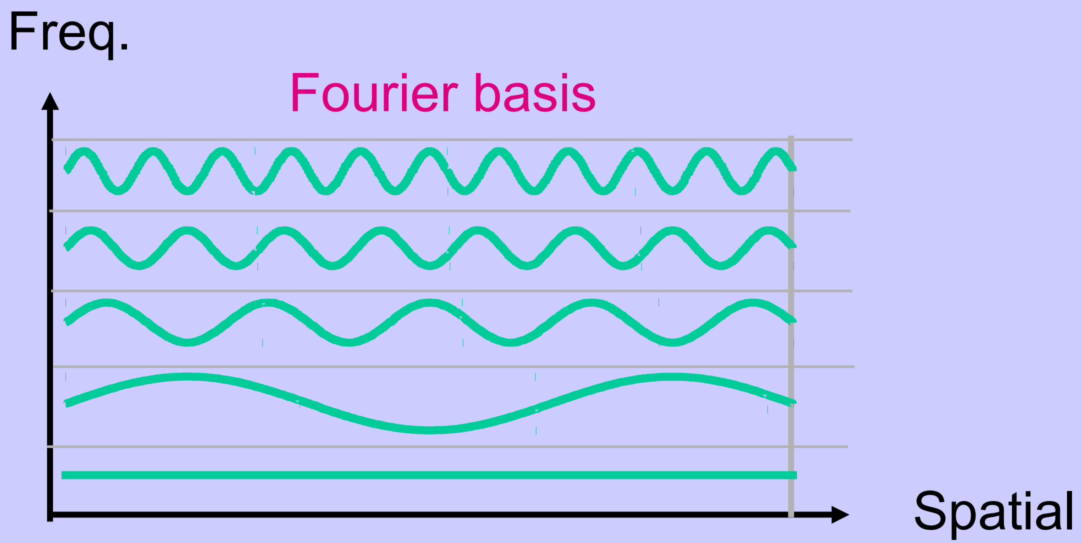


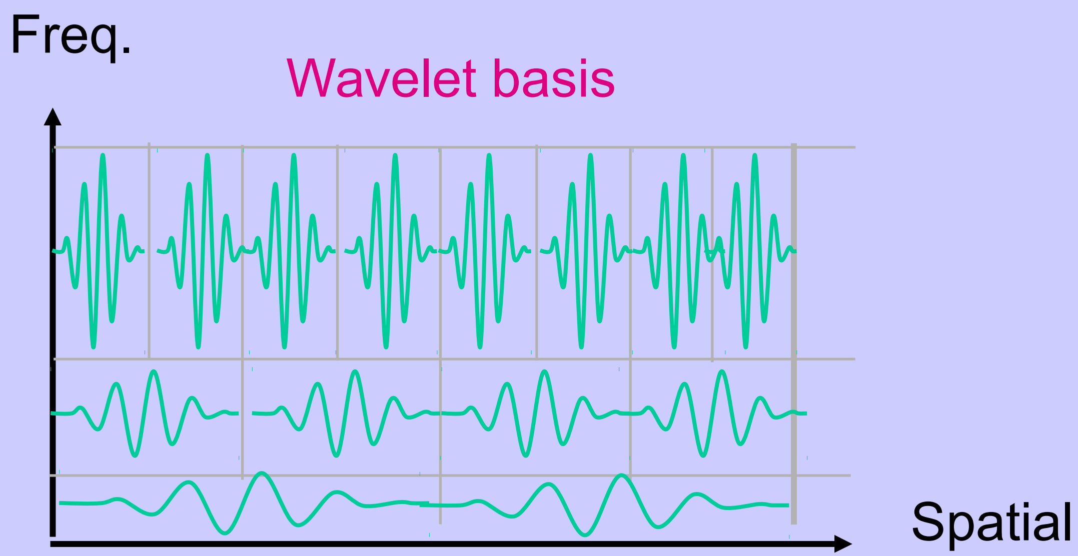


$$a = 2^j$$

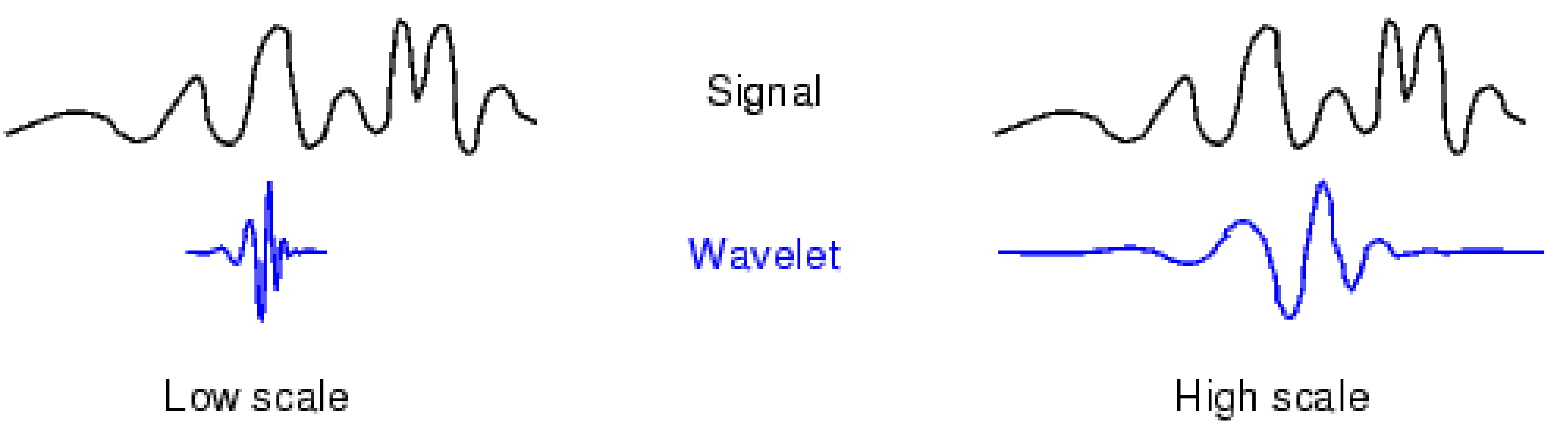
$$b = k2^j$$

Wavelets





Wavelets



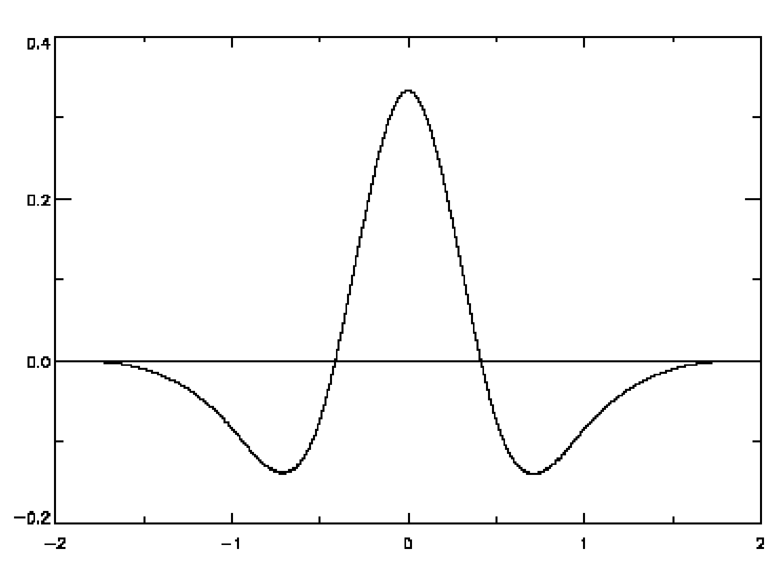
Cambio rápido
Alta frecuencia

Cambio lento
Baja frecuencia

Wavelets

- Posibles definiciones de Ψ_0 :
  - Wavelet de sombrero mexicano:

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



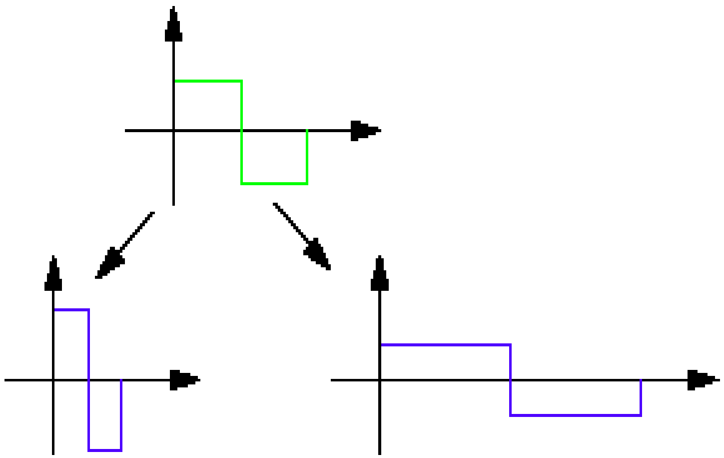
Wavelets

- Posibles definiciones de Ψ_0:
  - Wavelet de Haar:

Basis functions

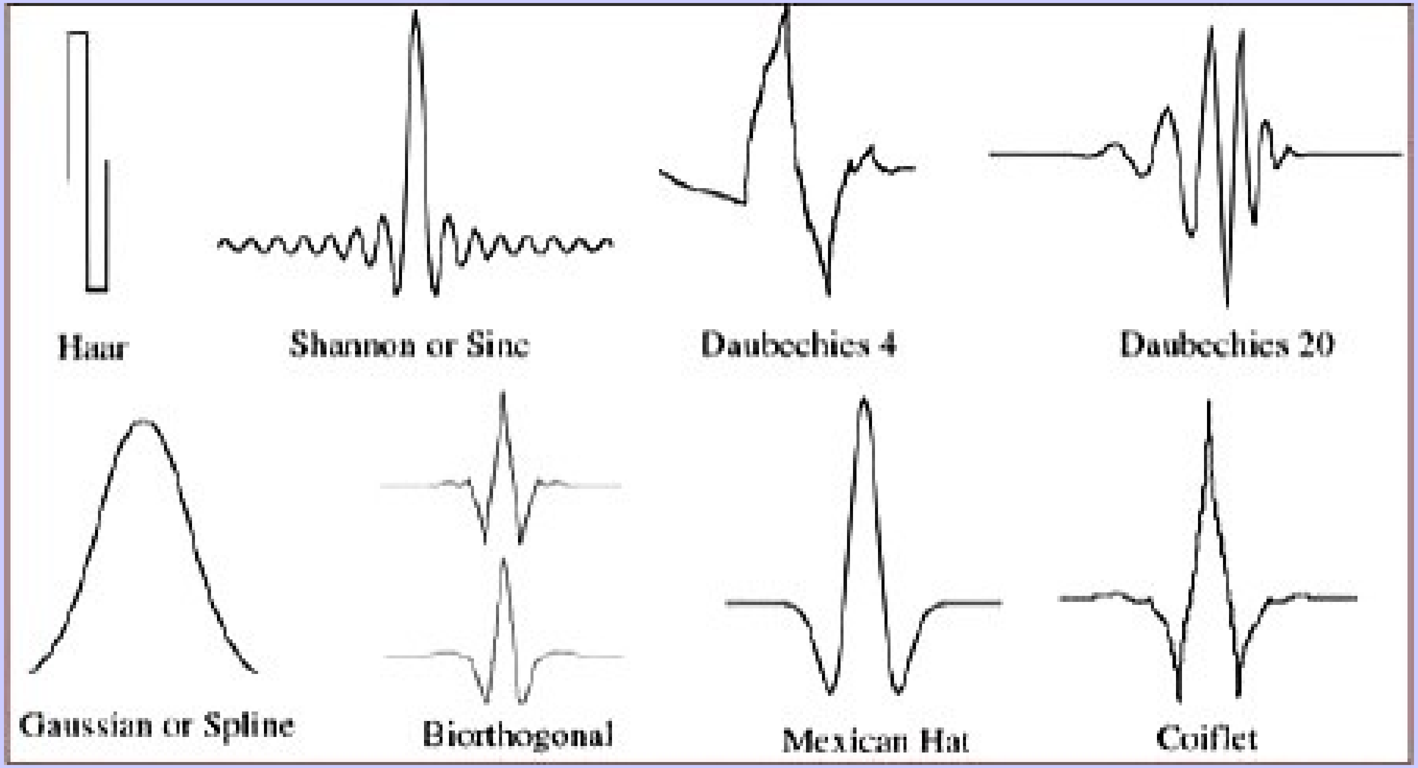
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \le t < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)$$



Wavelets

• Posibles definiciones de Ψ_0:



Transformada de Haar

- las funciones que la definen es en conjunto de wavelets ortogonal más simple posible (Haar 1910).
- La transformada de Haar puede expresarse como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{HFH}^T$$

donde **F** es la imagen de dimensiones N x N, **H** es la matriz de transformación de Haar de dimensiones N x N, y **T** es la transformada de Haar de dimensiones N x N.

- la transpuesta se necesita porque **H** no es simétrica.

Transformada de Haar

- la matriz **H** contiene las funciones básicas de Haar, $h_k(z)$.
- estas funciones se definen sobre el intervalo contínuo z ε [0,1] para k=0, 1, 2, ..., N-1, donde $N=2^n$.
- para generar **H** se encuentra k mediante:

$$k = 2^p + q - 1,$$

$$0 \leq p \leq n - 1,$$

$$q = 0 \text{ or } 1 \text{ for } p = 0,$$

$$1 \leq q \leq 2^p \text{ for } p \neq 0.$$

Transformada de Haar

• las funciones básicas de Haar son:

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad z \in [0, 1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0 & \text{otherwise, } z \in [0, 1] \end{cases}$$

• una fila k cualquiera de **H** contienen las $h_k(z)$ para valores $z = 0/N, 1/N, 2/N, ..., (N-1)/N$.

Transformada de Haar

- si N=2, **H** es:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

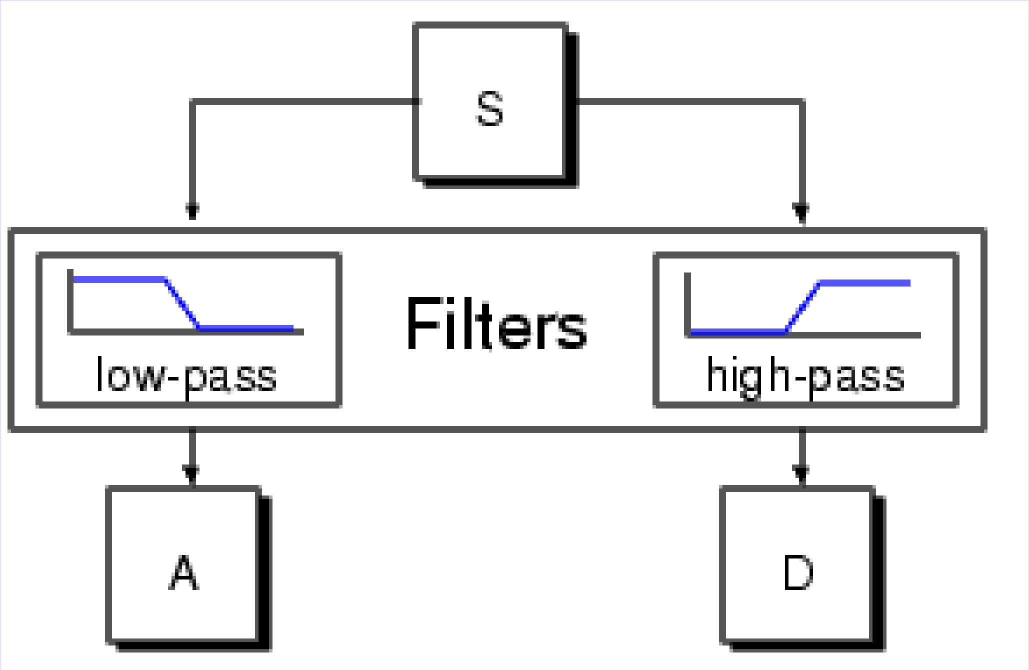
- si N es 4, los valores de k, p, q y **H** son:

k	p	q
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	2

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Wavelets

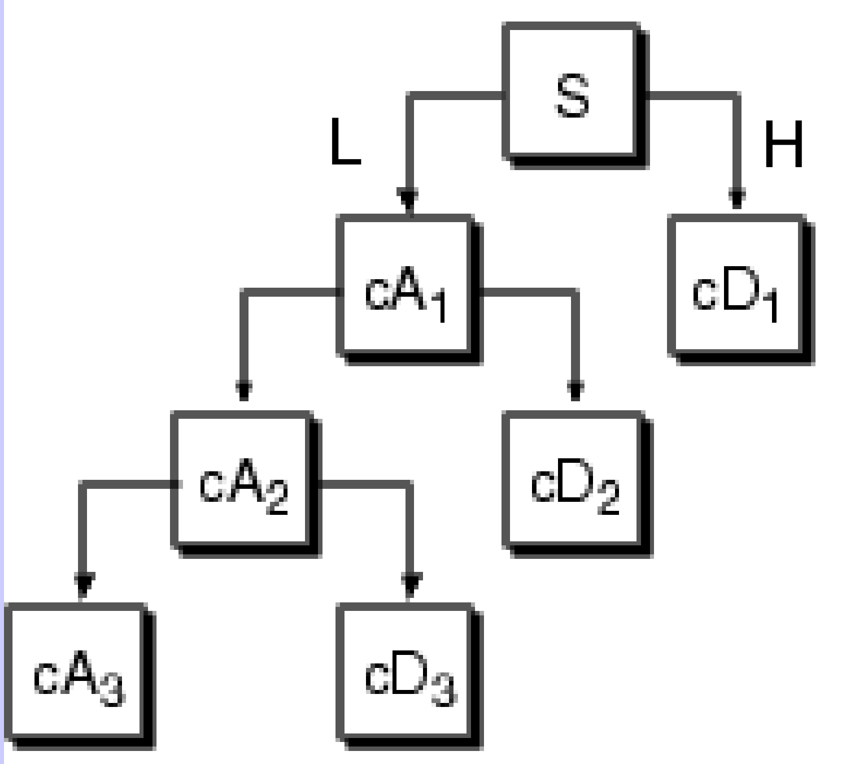
- Mallat (1989) definió la estructura de filtrado en banda para la Transformada Wavelet:

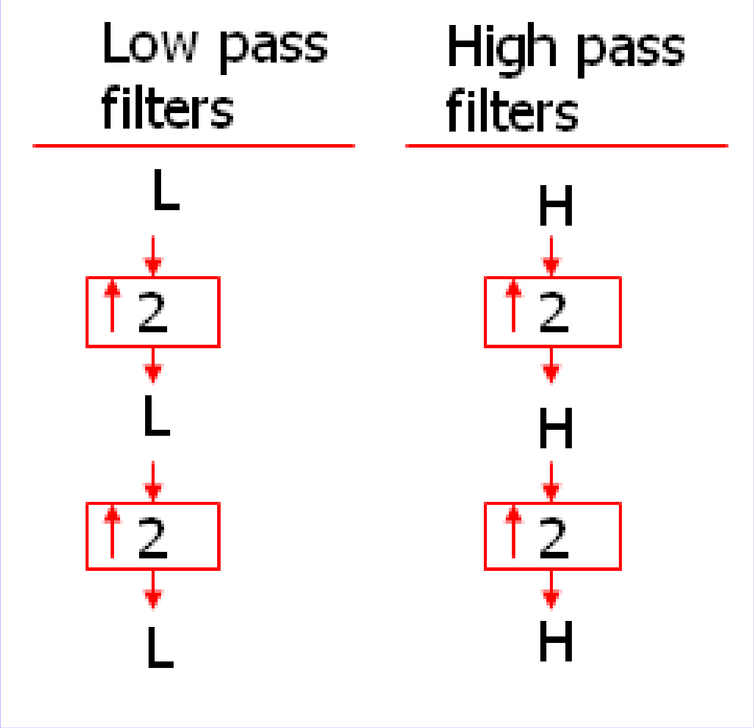


Aproximación Detalle

Wavelets

- el árbol de estructura de la Transformada Wavelet:

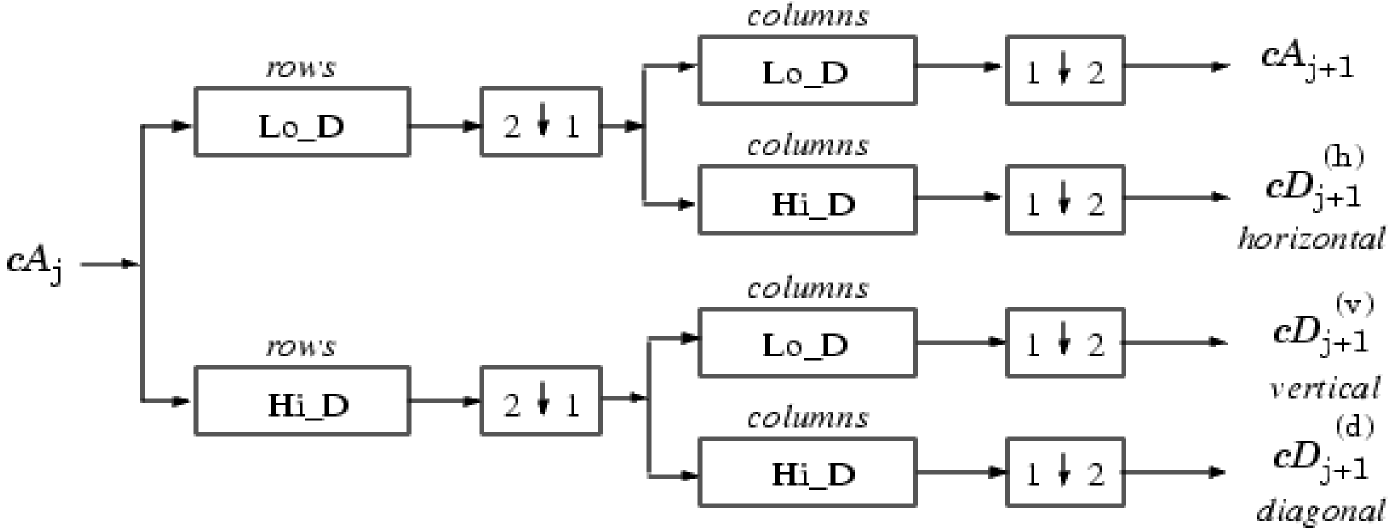




Wavelets – Descomposición en 2D

Two-Dimensional DWT

Decomposition Step

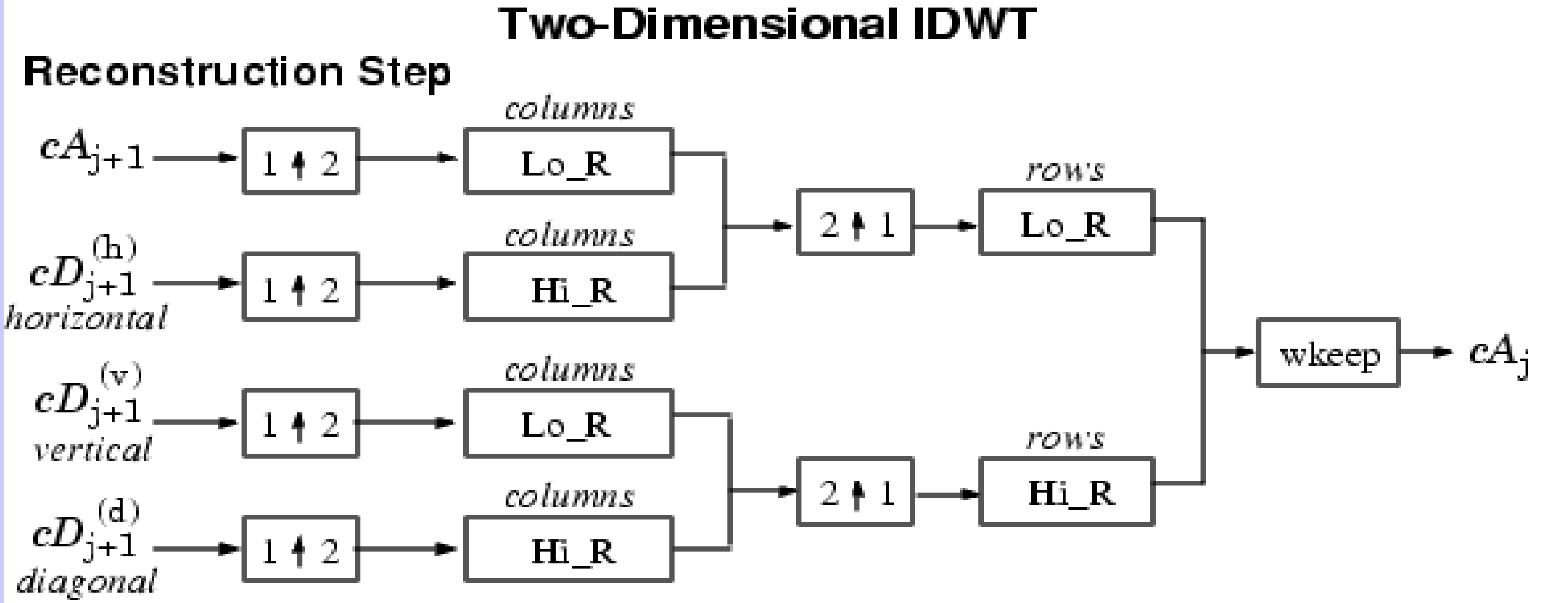


where

2 ↓ 1	Downsample columns: keep the even indexed columns.
1 ↓ 2	Downsample rows: keep the even indexed rows.
rows: X	Convolve with filter X the rows of the entry.
columns: X	Convolve with filter X the columns of the entry.

Initialization $CA_0 = s$ for the decomposition initialization.

Wavelets – Reconstrucción en 2D



where

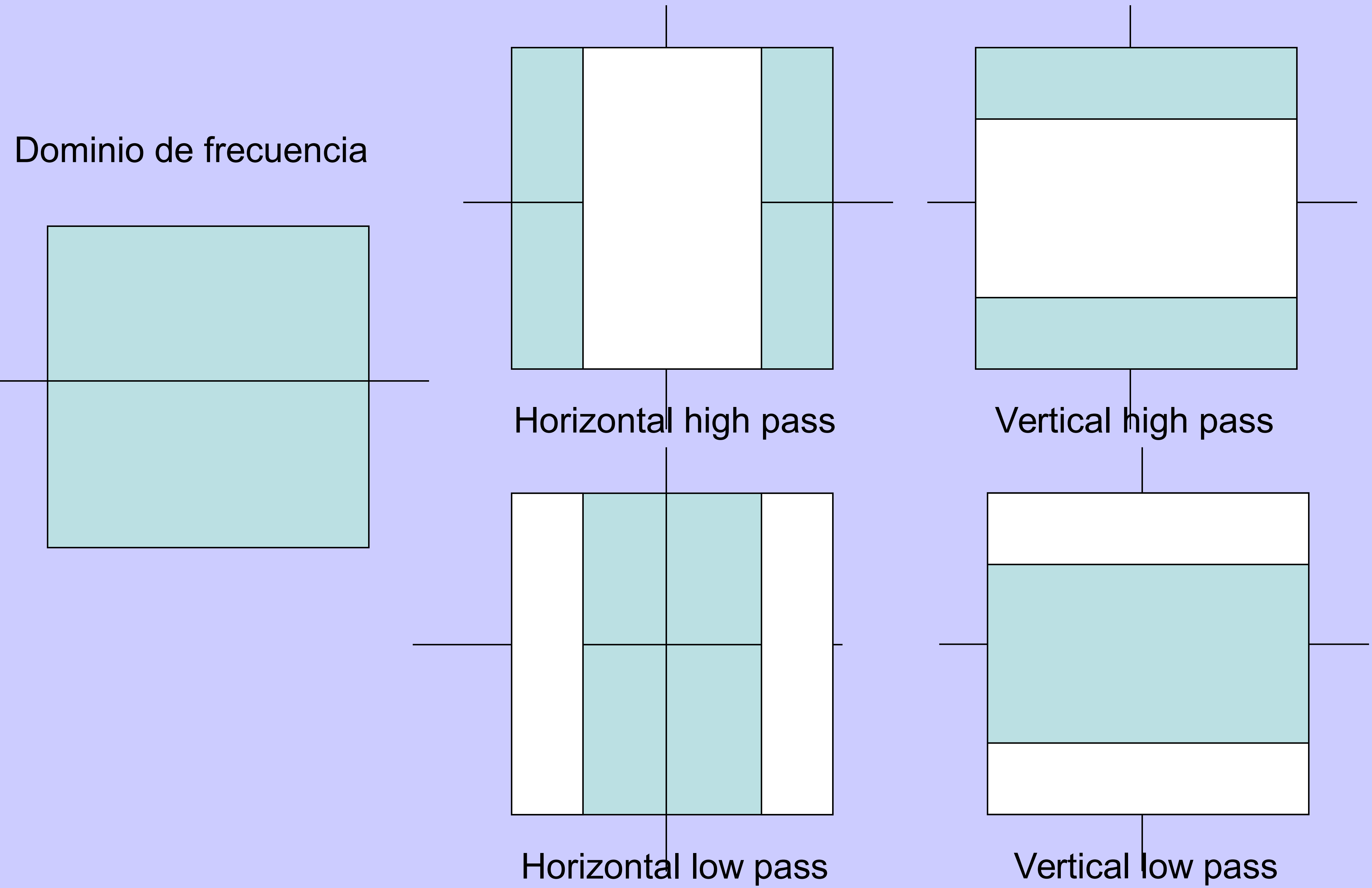
2 ↑ 1 Upsample columns: insert zeros at odd-indexed columns.

1 ↑ 2 Upsample rows: insert zeros at odd-indexed rows.

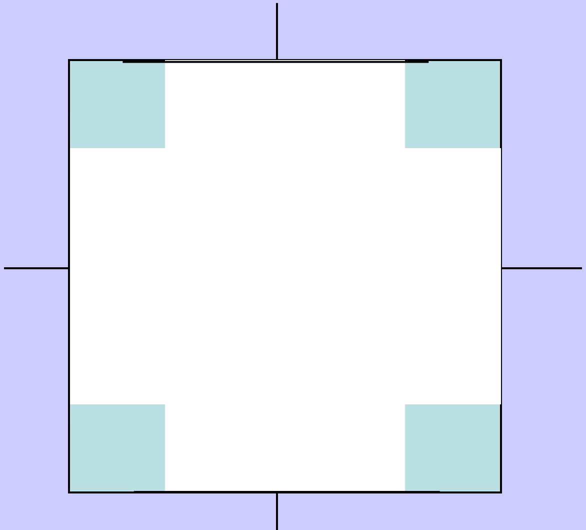
rows X Convolve with filter X the rows of the entry.

columns X Convolve with filter X the columns of the entry.

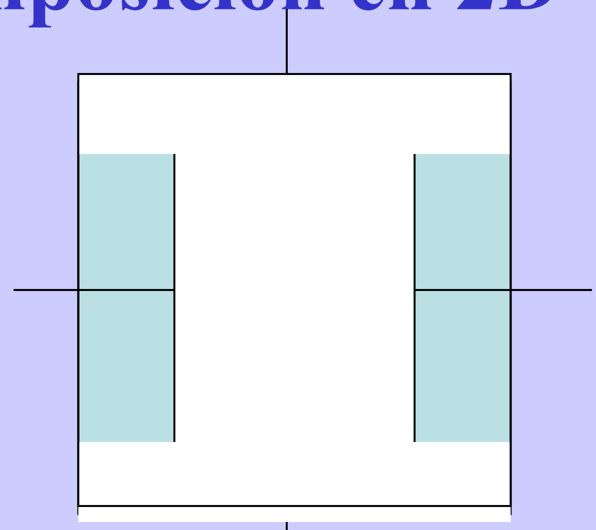
Wavelets – Descomposición en 2D



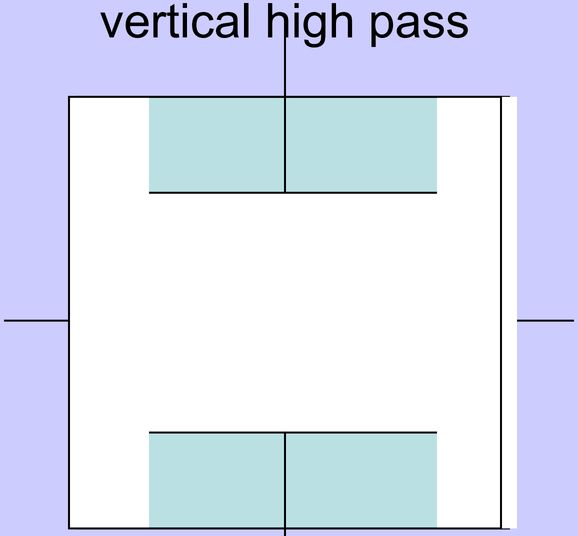
Wavelets – Descomposición en 2D



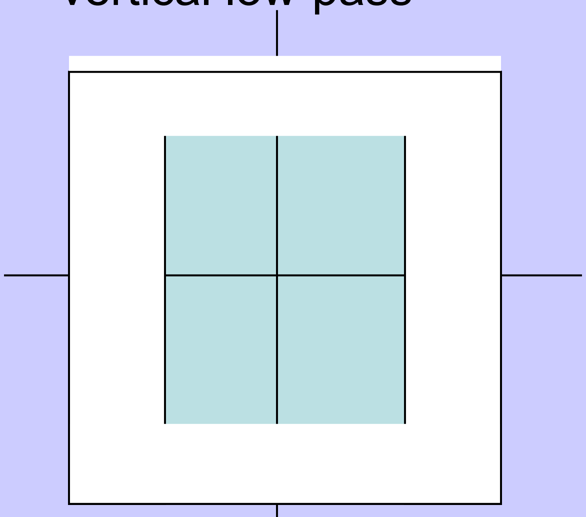
Horizontal high pass,
vertical high pass



Horizontal high pass,
vertical low-pass



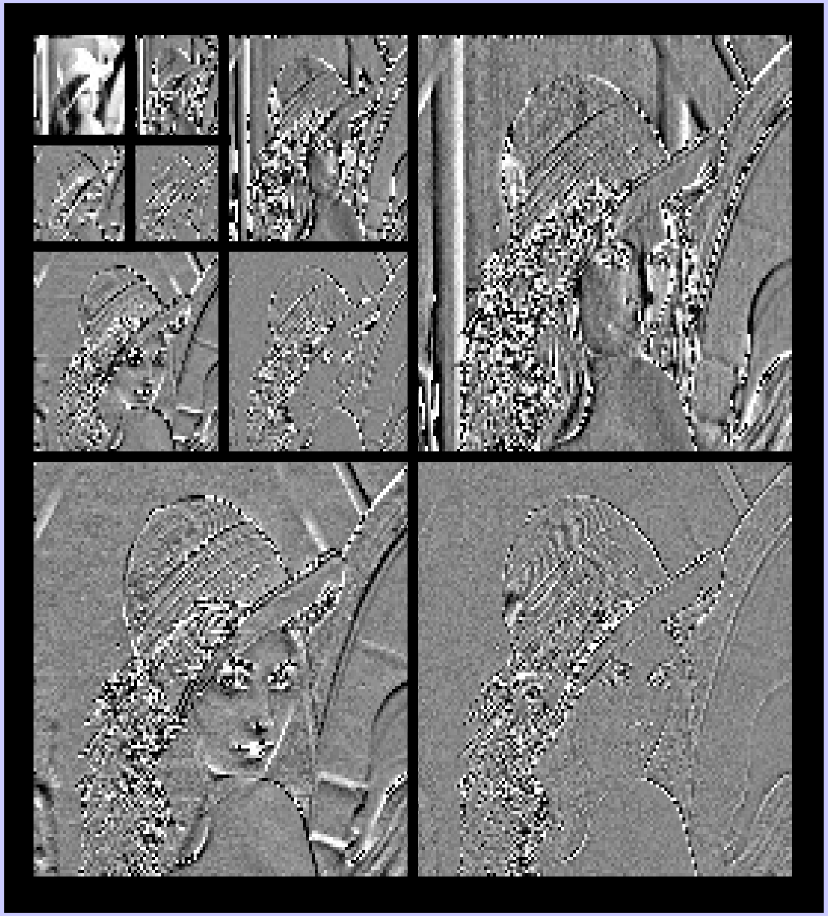
Horizontal low pass,
vertical high-pass

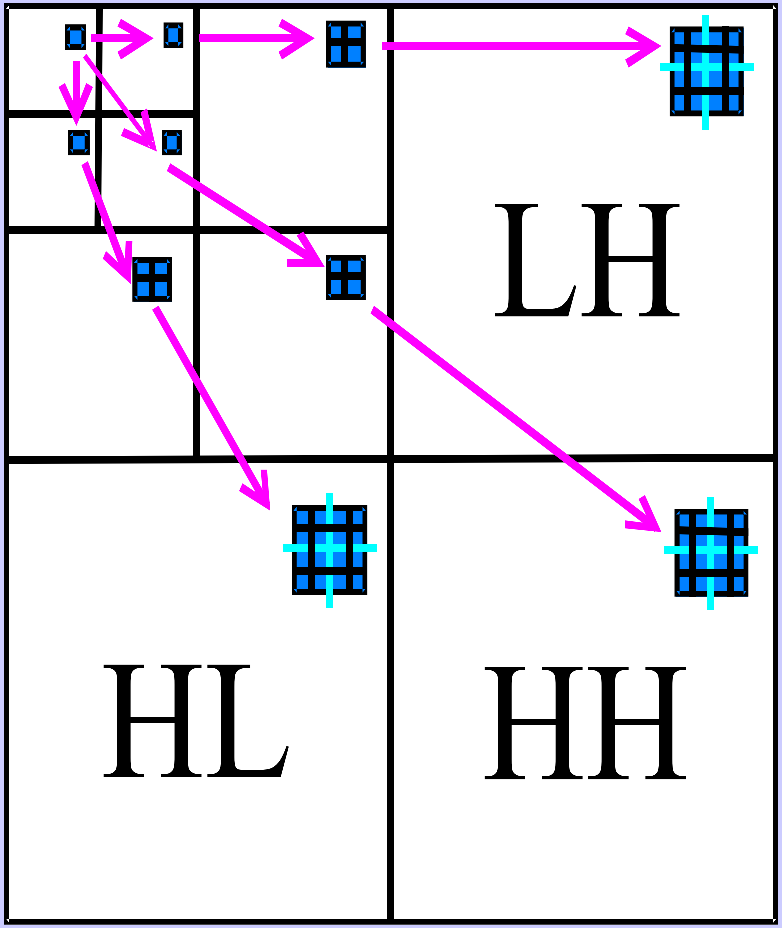


Horizontal low pass,
Vertical low-pass

Wavelets en 2D

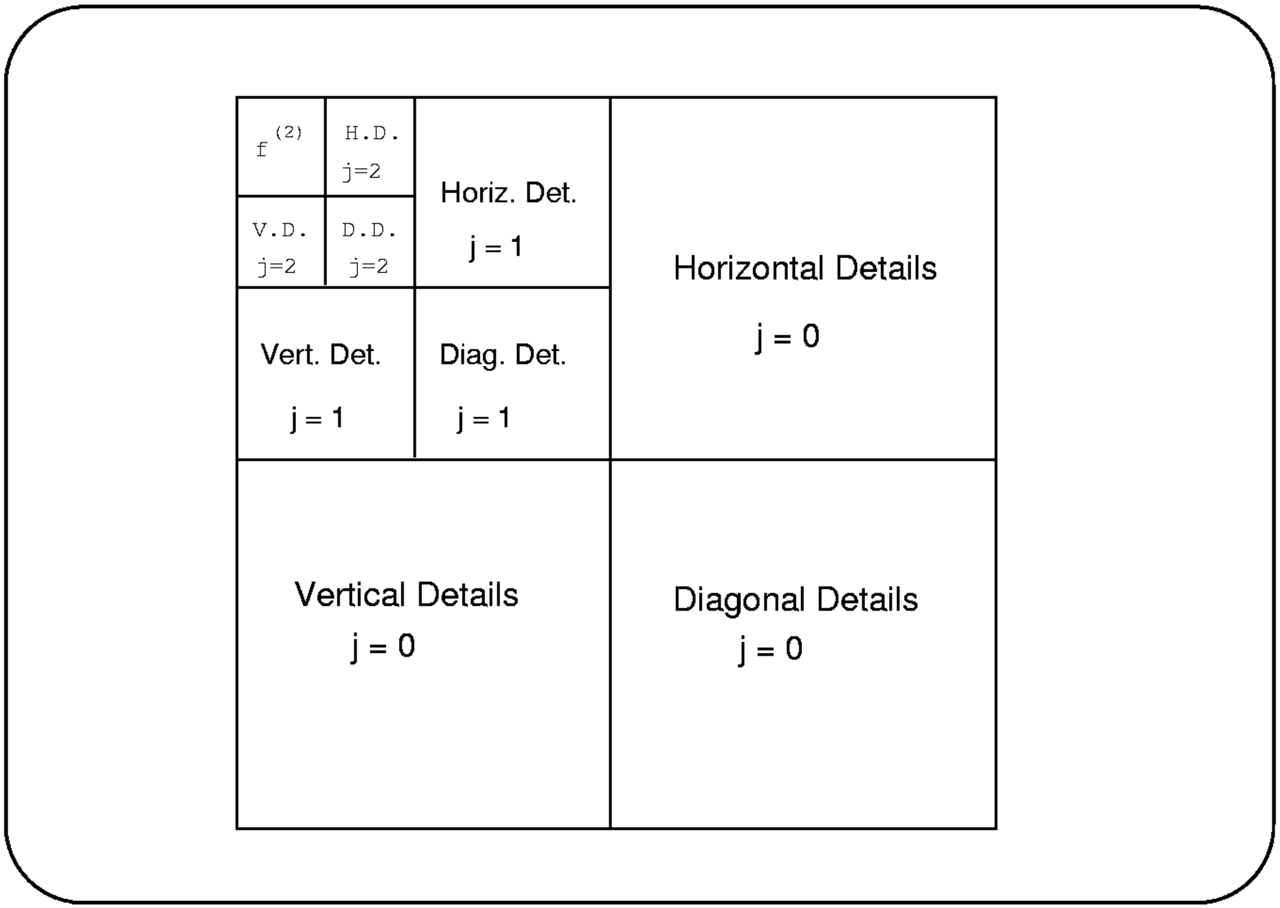
- ejemplo en 2D:





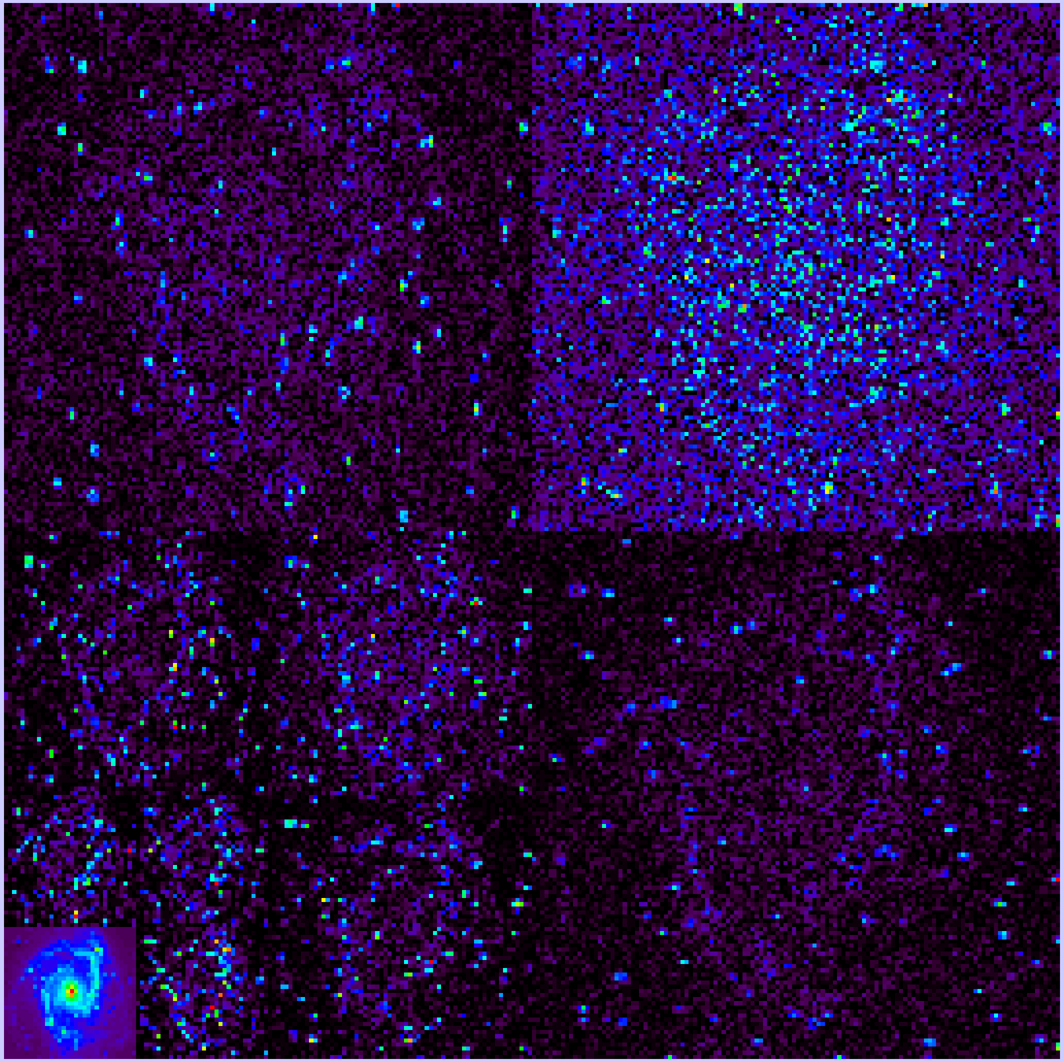
Wavelets en 2D

- ejemplo en 2D:



Wavelets en 2D

- ejemplo en 2D:



Wavelets – Remoción del ruido

- se puede remover el ruido en forma global o en los planos (coeficientes más bajos).
- la idea es fijar un límite para los coeficientes por debajo del cual son puestos a cero.
- es mejor aplicar lógica difusa para suavizar la imagen final.
- si M es el número total de pixels y σ la desviación standard, un límite para los coeficientes es:

$$\sigma\sqrt{2\log M}$$

- otra posibilidad es aplicar límites por plano en forma adaptiva dependiendo de la escala de interés.

Wavelets – mejora de la imagen

• otra posibilidad es mejorar la imagen aplicando una función no lineal a los coeficientes.

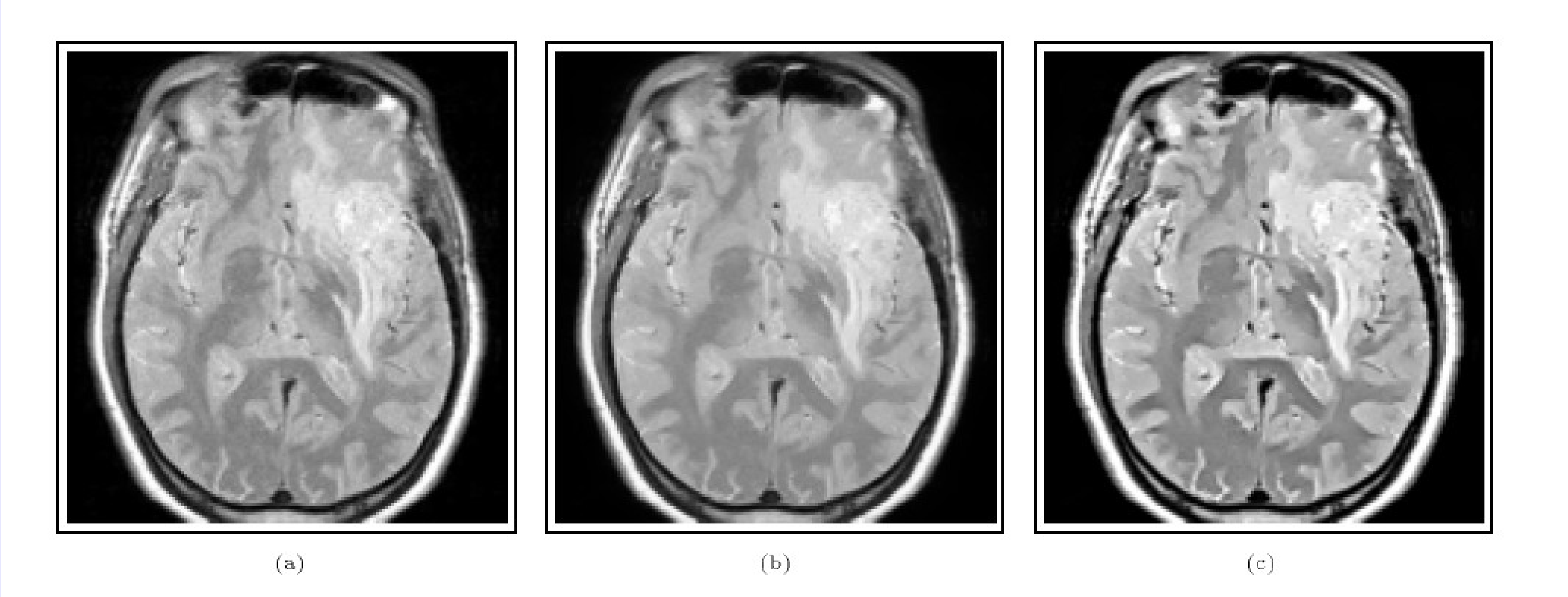
• por ejemplo, es posible mejorar el contraste haciendo que los coeficientes más pequeños sean aún más chicos y viceversa.

(a) Original Image

(c) Proposed Method

Wavelets – dos procesos simultáneos

- es posible aplicar ambos procesos para remover el ruido y mejorar simultáneamente la imagen.



Original Sin ruido Sin ruido y mejorada